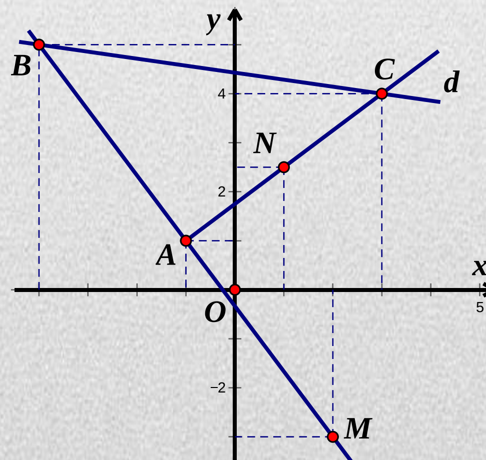
TRẦN ĐÌNH CƯ
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

Đốn ngã Oxy

Chủ đề 1: Tam giác

Tài liệu mến tặng các em học sinh chuẩn bị thi THPT Quốc gia 2016. Chúc các em đạt kết quả cao trong các kỳ thi sắp đến.



Huế, ngày 17/05/2016

CHỦ ĐỀ 1. TAM GIÁC

Bài 1. Cho điểm $A(2;-3), B(3;-2)$, ΔABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$; trọng tâm G của ΔABC thuộc đường thẳng $(d): 3x-y-8=0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải

Gọi $C(a;b), (AB): x-y-5=0 \Rightarrow d(C;AB)=\frac{|a-b-5|}{\sqrt{2}}=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} \Rightarrow |a-b-5|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=8 \;\; (1) \\ a-b=2 \;\; (2) \end{array}\right.$

Trọng tâm $G\left(\frac{a+5}{3};\frac{b-5}{3}\right) \in (d) \Rightarrow 3a-b=4 \quad (3)$

Từ $(1),(3) \Rightarrow C(-2;10) \Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{65}+\sqrt{89}}$

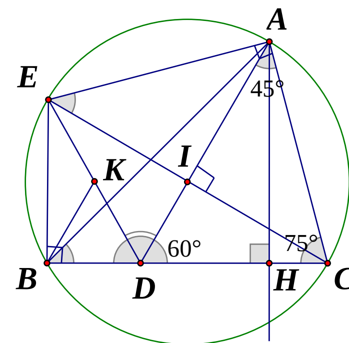
Từ $(2),(3) \Rightarrow C(1;-1) \Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{3}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(-4;-2)$, $ACB=75^0$. Đường cao kẻ từ đỉnh A có phương trình $2x+y=0$, D là điểm thuộc cạnh BC sao cho $DC=2DB$. Tìm tọa độ điểm A biết $ADC=60^0$ và điểm A có hoành độ âm.

Giải

Cách 1.

Phương trình đường thẳng BC qua $B(-4;-2)$ và vuông góc với đường cao AH có dạng $BC: x-2y=0$



Lại có $BH=d(B;AH)=\frac{|10|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

Đặt $AH=x \; (x>0)$. Xét các tam giác vuông ACH và ADH. Ta có:

$CH=\frac{x}{\tan 75^0}$, $DH=\frac{x}{\tan 60^0}=\frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC=\frac{x}{\tan 75^0}+\frac{x}{\sqrt{3}}$

Mặt khác:

$DC=2DB \Rightarrow x\left(\frac{1}{\tan 75^0}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\left(2\sqrt{5}-\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow x=\frac{4\sqrt{5}}{\frac{1}{\tan 75^0}+\sqrt{3}}=2\sqrt{5}$

Gọi $A(t;-2t) \in AH: 2x+y=0 \Rightarrow AH=d(A;BC)=\frac{|5t|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \Rightarrow A(2;-4) \;\; (\text{loại}) \\ t=-2 \Rightarrow A(-2;4) \end{array}\right.$

Vậy $A(-2;4)$ là điểm cần tìm.

Chú ý: $\tan 75^0 = \tan\frac{150^0}{2} \Rightarrow \tan 150^0 = \frac{2\tan 75^0}{1-\tan^2 75^0} \Rightarrow \tan 75^0 = 2+\sqrt{3}$

Cách 2. Lấy E đối xứng với C qua AD.

Vì $CAD=180^0-75^0-60^0=45^0$

$\Rightarrow CAE=90^0; ADC=60^0 \Rightarrow ADE=60^0; BDE=60^0$

Gọi K là trung điểm của DE. Ta có:

$DK=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}DC=DB\Rightarrow \Delta BDK$ là tam giác đều.

Do đó $BK=DK=\frac{1}{2}DE\Rightarrow \Delta BDE$ vuông tại B.

Vậy tứ giác ACBE là tứ giác nội tiếp, suy ra $ABC=AEC=45^0$ hay $BAH=45^0$

Do $A\in AH\Rightarrow A(a;-2a)\Rightarrow \overrightarrow{BA}=(a+4;2-2a)$

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{u_{AH}}\right)=\cos 45^0\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|(a+4)-2(2-2a)|}{\sqrt{5}\sqrt{(a+4)^4+(2-2a)^2}}\Rightarrow a=\pm 2$

Vì A có hoành độ âm nên $A(-2;4)$ là điểm cần tìm.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=26$ với $G\left(1;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác và $M(7;2)$ nằm trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC; $M\neq A$, điểm $F(3;2)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng $y_B>y_C$

Giải

Gọi I là tâm của đường tròn (C) và H là trực tâm ΔABC thì G, H, I thẳng hàng và $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$ (tính chất đường thẳng Euler)

Mà $I(2;3)$ nên $\begin{cases} x_H-1=-2(2-1) \\ y_H-\frac{8}{3}=-2\left(3-\frac{8}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_H=-1 \\ y_H-2\end{cases}\Rightarrow H(-1;2)$

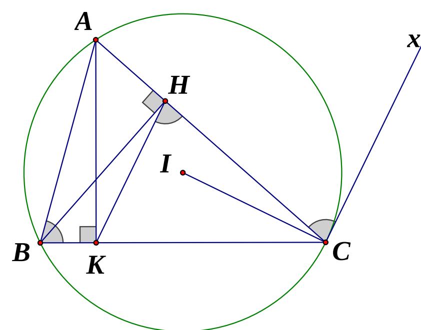
Ta thấy $M\in(C)$ và A, H, M thẳng hàng; BC là đường trung trực của HM. Ta có $F(3;2)$ và $\overrightarrow{HM}=(8;0)$ nên $BC: x-3=0$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-3=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=3 \\ y=-2; y=8\end{cases}$$

$HM: y-2=0$ và $A=HM\cap(C)$ nên tìm được $A(-3;2)$. Vậy $A(-3;2)$, $B(3;8)$, $C(3;-2)$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T):(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Các điểm $K(-1;1)$, $H(2;5)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng đỉnh C có hoành độ dương.

Giải



(T) có tâm $I(1;2)$. Gọi Cx là tiếp tuyến của (T) tại C. Ta có

$HCx=ABC=\frac{1}{2}SđAC$ (1)

Do $AHB=AKB=90^0$ nên AHKB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow ABC=KHC$ (cùng bù với góc AHK) (2)

Từ (1) và (2) ta có $HCx=KHC\Rightarrow HK//Cx$

Mà $IC\perp Cx\Rightarrow IC\perp HK$

Do đó IC có vec-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH}=(3;4)$, IC có phương trình $3x+4y-11=0$

Do C là giao của IC với (T) nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 3x+4y-11=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$. Do $x_C>0$ nên $C(5;-1)$

Đường thẳng AC đi qua C và có vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CH}=(-3;6)$ nên AC có phương trình: $2x+y-9=0$

Do A là giao của AC và (T) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 2x+y-9=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ (loại). Do đó $A(1;7)$

Đường thẳng BC đi qua C và có vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CK}=(-6;2)$ nên BC có phương trình $x+3y-2=0$.

Do B là giao của BC và (T) nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

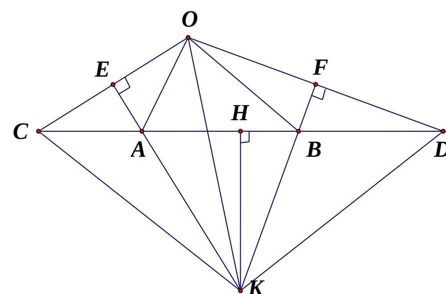
$\begin{cases} x+3y-2=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ (loại). Do đó $B(-4;2)$

Vậy $A(1;7)$, $B(-4;2)$, $C(5;-1)$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A và B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và điểm $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC=AO$ và các điểm C, B nằm khác phía nhau so với điểm A. Biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ của các đỉnh A, B.

Giải

Cách 1.



Trên Δ lấy điểm D sao cho $BD=BO$ và D, A nằm khác phía nhau so với B.

Gọi E là giao điểm của các đường thẳng KA và OC, gọi F là giao điểm của các đường thẳng KB và OD.

Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O của ΔOAB nên KE là phân giác của góc $\widehat{OAC}$. Mà OAC là tam giác cân tại A (do $AO=AC$, theo gt) nên suy ra KE cũng là đường trung trực của OC. Do đó E là trung điểm của OC và $KC=KO$.

Xét tương tự đối với KF, ta cũng có F là trung điểm của OD và $KD=KO$

Suy ra ΔCKD cân tại K. Do đó, hạ $KH\perp\Delta$, ta có H là trung điểm của CD.

Như vậy:

+ A là giao của Δ và đường trung trực d_1 của đoạn thẳng OC (1)

+ B là giao của Δ và đường trung trực d_2 của đoạn thẳng OD, với D là điểm đối xứng của C qua H và H là hình chiếu vuông góc của K trên Δ (2)

Vì $C\in\Delta$ và có hoành độ $x_0=\frac{24}{5}$ (gt) nên gọi y_0 là tung độ của C, ta có:

$4.\frac{24}{5}+3y_0-12=0 \Rightarrow y_0=-\frac{12}{5}$

Từ đó, trung điểm E của OC có tọa độ là $\left(\frac{12}{5};-\frac{6}{5}\right)$ và đường thẳng OC có phương trình: $x+2y=0$

Suy ra phương trình của $d_1: 2x-y-6=0$

Do đó, theo (1), tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x+3y-12=0\\2x-y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(3;0)$$

Gọi d là đường thẳng đi qua $K(6;6)$ và vuông góc với Δ, ta có phương trình của d là: $3x-4y+6=0$. Từ đây, do H là giao điểm của Δ và d nên tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x+3y-12=0\\3x-4y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{12}{5}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)\Rightarrow D\left(-\frac{12}{5};\frac{36}{5}\right)$$

Do đó, trung điểm F của OD có tọa độ là $\left(-\frac{6}{5};\frac{18}{5}\right)$ và đường thẳng OD có phương trình: $3x+y=0$

Suy ra phương trình của d_2 là $x-3y+12=0$

Do đó, theo (2), tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x+3y-12=0\\x-3y+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}\Rightarrow B(0;4)$$

Cách 2.

Do A và C thuộc Δ nên $A\left(a;\frac{12-4a}{3}\right), C\left(\frac{24}{5};-\frac{12}{5}\right)$

Giả thiết ta có $OA=AC\Leftrightarrow ...a=3$. Vậy $A(3;0)$

Đường thẳng OK có pt: $y=x$.

Vẽ đường thẳng qua A và vuông góc OK, cắt OK tại I và cắt OB tại E thì OK là đường trung trực của AE (vì OK là đường phân giác góc AOB)

Từ đó tìm được $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, suy ra $E(0;3)$. Vậy pt OB: $x=0$. Suy ra $B(0;4)$.

Vậy $A(3;0)$, $B(0;4)$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, gọi $H(3;-2)$, $I(8;11)$, $K(4;-1)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Giải

$\overrightarrow{HK}=(1;1)\Rightarrow AK: x-y-5=0$ và $BC: x+y-3=0$

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow IM\perp BC\Rightarrow IM: x-y+3=0\Rightarrow M(0;3)$

$\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MI}=(16;16)\Rightarrow A(19;14)$

Chọn $B(b;3-b)\in BC\Rightarrow C(-b;b+3)\Rightarrow\overrightarrow{BH}=(3-b;b-5)$, $\overrightarrow{CA}=(19+b;11-b)$

Ta có $BH\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0$

$\Leftrightarrow(3-b)(19+b)+(b-5)(11-b)=0\Leftrightarrow-2b^2+2=0\Leftrightarrow b=\pm1$

Với $b=1$ ta có $B(1;2)$, $C(-1;4)$

Với $b=-1$ ta có $B(-1;4)$, $C(1;2)$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (C) biết đường thẳng BC có phương trình là $2x-5=0$.

Giải

Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=9\\ 2x-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=2\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$. Vì tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (C) nên I là trọng tâm của tam giác. Từ đó tìm được $A(-2;2)$

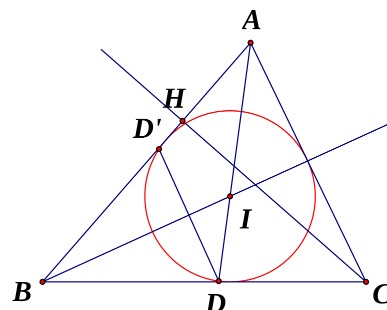
Vậy $B\left(\dfrac{5}{2};2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{5}{2};2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và ngược lại. $A(-2;2)$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(T):x^2+(y+1)^2=5$. Giao điểm của BC với phân giác trong của góc BAC là $D\left(0;-\dfrac{7}{2}\right)$ và phương trình đường cao CH (của tam giác ABC) là $x+2y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết phân giác của ABC là $x-y-1=0$.

Giải

Đường tròn (T) có tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Gọi D' là điểm đối xứng của D qua phân giác của ABC $(d)\Rightarrow D'(x;y)\in AB$ ta có:



$\begin{cases}DD'\perp d\\ k\in d\end{cases}$ (với K là trung điểm của DD')

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)=0\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y-\frac{7}{2}}{2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}\\ y=-1\end{cases} \Rightarrow D'\left(-\dfrac{5}{2};-1\right)$

Pt đường thẳng AB qua $D'\left(-\dfrac{5}{2};-1\right)$ và vuông góc với CH là $AB:2x-y+4=0$

Do I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

$\Rightarrow$ Pt đường thẳng AD qua $I(0;-1)$ và $D\left(0;-\dfrac{7}{2}\right)$ là $x=0$

$A=AD\cap AB\Rightarrow A(0;4)$, $B=AB\cap BI\Rightarrow \begin{cases}x-y-1=0\\ 2x-y+4=0\end{cases}\Rightarrow B(-5;-6)$

Ta có $BC:x-2y-7=0\Rightarrow C=BC\cap CH\Rightarrow \begin{cases}x-2y-7=0\\ x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow C(3;-2)$

Vậy $A(0;4)$, $B(-5;-6)$, $C(3;-2)$ là các điểm cần tìm.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-3;-4)$, tâm đường tròn nội tiếp $I(2;1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $J\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{125}{4}$ (1)

Phương trình đường thẳng $AI: \frac{x+3}{2+3}=\frac{y+4}{1+4} \Leftrightarrow x-y-1=0$

Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tại điểm thứ hai là D, trung điểm cung BC. Hoành độ điểm D là nghiệm khác -3 của phương trình:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-2)^2=\frac{125}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\frac{9}{2} \end{array}\right. \Rightarrow D\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)$$

Ta có: $BID=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ và $IBD=IBC+CBD=\frac{B}{2}+\frac{A}{2} \Rightarrow BID=IBD$

$\Rightarrow DI=DB=DC \Rightarrow B, C$ nằm trên đường tròn tâm D bán kính DI có phương trình:

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{50}{4} \quad (2)$$

Tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ phương trình (1) và (2):

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{125}{4} \\ \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{50}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x-2y-30=0 \\ x^2+y^2-9x-7y+20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x+5y-50=0 \\ x^2+y^2-9x-7y+10=0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng BC: $10x+5y-50=0$ hay $2x+y-10=0$

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của ADB có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Giải

Gọi AI là phân giác trong của BAC.

Ta có: $AID=ABC+BAI$

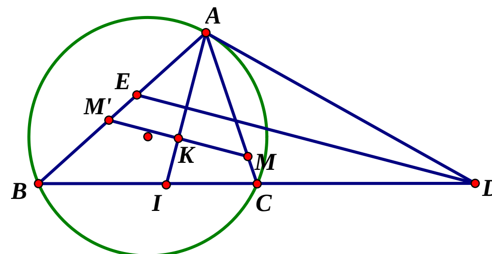
$IAD=CAD+CAI$

Mà $BAI=CAI, ABC=CAD$ nên $AID=IAD$

$\Rightarrow \Delta DAI$ cân tại $D \Rightarrow DE \perp AI$

Phương trình đường thẳng AI: $x+y-5=0$

Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua AI $\Rightarrow$ PT đường thẳng MM′: $x-y+5=0$



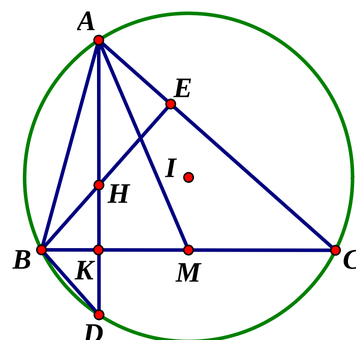
Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow K(0;5) \Rightarrow M'(4;9)$

VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5) \Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (5;-3)$

Vậy phương trình AB là: $5(x-1) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 7 = 0$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0,\ x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Giải



Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta ký hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của AD: $1(x-4) + 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $BHK = KCE$ mà $KCE = BDA$ (nội tiếp chắn cung AB). Suy ra $BHK = BDA$. Vậy K là trung điển của HD nên $H(2;4)$

Do B thuộc BC $\Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$.

$\overrightarrow{HB} = (t-2;t-8);\ \overrightarrow{AC} = (6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t) + (t-8)(2-t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 7 \end{array}\right.$$

Do $t \le 3 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1;-3),\ \overrightarrow{AC} = (4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (3;1),\ \overrightarrow{n_{AC}} = (0;1)$

Suy ra $AB: 3x + y - 4 = 0,\ AC: y - 1 = 0$

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7;3), N(4;2)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Gọi H_1 đối xứng với H qua BC $\Rightarrow$ pt $HH_1: x-y=0 \Rightarrow \{I\}=HH_1 \cap BC$

$\Rightarrow I(4;4) \Rightarrow H_1(3;3)$. Ta chứng minh được điểm H_1 thuộc (ABC)

$(ABC): x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \left(a^2+b^2-c>0\right)$

Do $\begin{cases} M\in(ABC) \\ N\in(ABC) \\ H_1\in(ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7^2+3^2-14a-6b+c=0 \\ 4^2+2^2-8a-4b+c=0 \\ 3^2+3^2-6a-6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ c=36 \end{cases}$

$\Rightarrow (ABC): x^2+y^2-10x-8y+36=0$

$\{A\}=HH_1\cap(ABC) \Rightarrow A(6;6)$ do $A\neq H_1$.

$\{B,C\}=BC\cap(ABC) \Rightarrow$ tọa độ B, C là nghiệm hpt $\begin{cases} x+y-8=0 \\ x^2+y^2-10x-8y+36=0 \end{cases}$

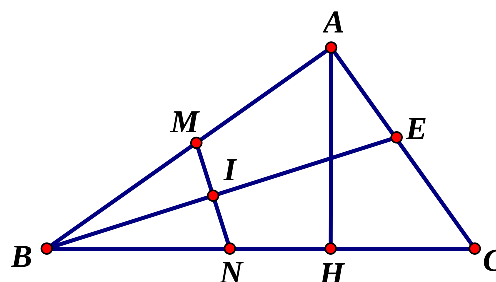
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow BC=3\sqrt{2},\ d(A;BC)=\dfrac{|6+6-8|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Suy ra diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}d(A;BC).BC=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6$ (đvdt)

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đường cao AH có phương trình $3x+4y+10=0$ và đường phân giác trong BE có phương trình $x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và cách đỉnh C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Gọi N là điểm đối xứng của M qua phân giác BE thì N thuộc BC.



Tính được $N(1;1)$. Đường thẳng BC qua N và vuông góc với AH nên có phương trình: $4x-3y-1=0$

B là giao điểm của BC và BE. Suy ra tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(4;5)$

Đường thẳng AB qua B và M nên có phương trình: $3x-4y+8=0$

A là giao điểm của AB và AH, suy ra tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 3x-4y+8=0 \\ 3x+4y+10=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$

Điểm C thuộc BC và $MC=2$, suy ra tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=1 \\ x=\dfrac{31}{25};y=\dfrac{33}{25} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(1;1) \\ C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right) \end{array}\right.$

Thế tọa độ A và $C(1;1)$ vào phương trình BE thì hai giá trị trái dấu, suy ra A và C khác phía đối với BE, do đó BE là phân giác trong tam giác ABC.

Tương tự A và $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$ thì A, C cùng phía với BE nên BE là phân giác ngoài của tam giác ABC.

$BC = 5,\ AH = d(A;BC) = \frac{49}{20}$. Do đó $S_{ABC} = \frac{49}{8}$ (đvdt)

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 2 = 0$.

Giải

Ta thấy tứ giác BMHN nội tiếp. Suy ra I là trung điểm BH.

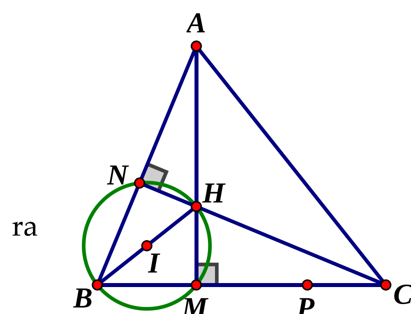
$B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

Suy ra $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (3+2t;-t-4),\ \overrightarrow{BP} = (2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1) + (t+4)(t+2) = 0$ Suy ra

$\Leftrightarrow 5t^2 + 10t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$



$H(0;1),\ B(4;-1),\ \overrightarrow{AH} = (1;-3)$, đường thẳng BC: $x - 3y - 7 = 0$

Đường thẳng $AC: 2x - y + 6 = 0$. Tìm được tọa độ $C(-5;-4)$

Vậy $B(4;-1),\ C(-5;-4)$

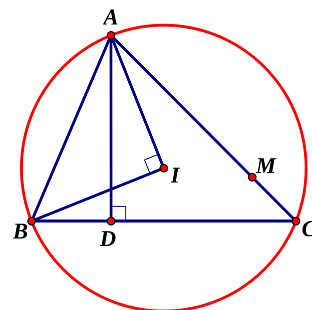
Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $AIB = 90^0$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$. Đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết đỉnh A có hoành độ dương.

Giải

$AIB = 90^0 \Rightarrow BCA = 45^0$ hoặc $BCA = 135^0$

Suy ra $CAD = 45^0 \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D.

Ta có $DI \perp AC$, khi đó phương trình đường thẳng AC có dạng $x - 2y + 9 = 0$.



$A(2a-9;a),\ \overrightarrow{AD} = (8-2a;-1-a)$

$AD^2 = 40 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right. \Rightarrow A(1;5)$

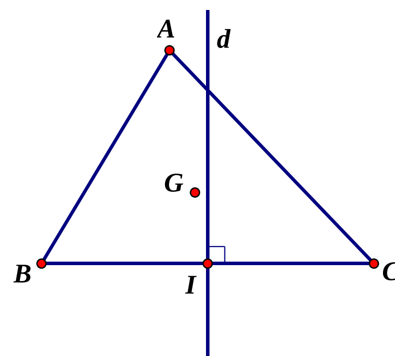
Phương trình BD: $x + 3y + 4 = 0$

Phương trình BI: $3x + 4y + 5 = 0$

$B = BI \cap BD \Rightarrow B(2;-2)$

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(1;\frac{11}{3}\right)$ đường thẳng trung trực của cạnh BC có phương trình $x - 3y + 8 = 0$ và đường thẳng AB có phương trình $4x + y - 9 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

Giải



Ta có A, B thuộc đường thẳng $4x+y-9=0$ nên $A(a;-4a+9)$, $B(b;-4b+9)$

Do $G\left(1;\frac{11}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $C(-a-b+3;4a+4b-7)$

Gọi I là trung điểm BC ta có $I\left(\frac{3-a}{2};2a+1\right)$

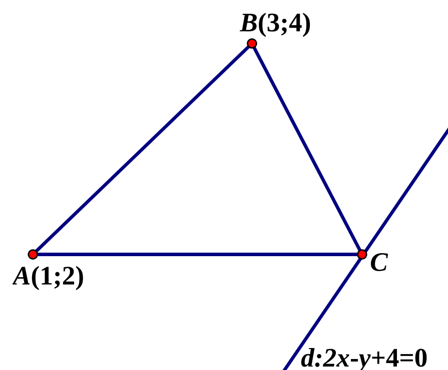
Mặt khác $d:x-3y+8=0$ là trung trực của cạnh BC $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in d \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_d}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-a}{2}-3(2a+1)+8=0 \\ 3.(3-2b-a)+(4a+8b-16)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy $A(1;5)$, $B(3;-3)$, $C(-1;9)$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(3;4)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $d:2x-y+4=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đỉnh C có tung độ dương và diện tích tam giác ABC bằng 2.

Giải



Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ và $AB=2\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng AB: $x-y+1=0$

Đỉnh C nằm trên đường thẳng $d:2x-y+4=0$ nên $C(t;2t+4)$ và $t>-2$

$$d(C;AB)=\frac{|t-(2t+4)+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|t+3|}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C;AB)=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.\frac{|t+3|}{\sqrt{2}}=|t+3|$$

Bởi vậy: $S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow |t+3|=2\Rightarrow t=-1$

Nên $C(-1;2)$

Gọi phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Thay tọa độ A, B, C vào phương trình, ta có:

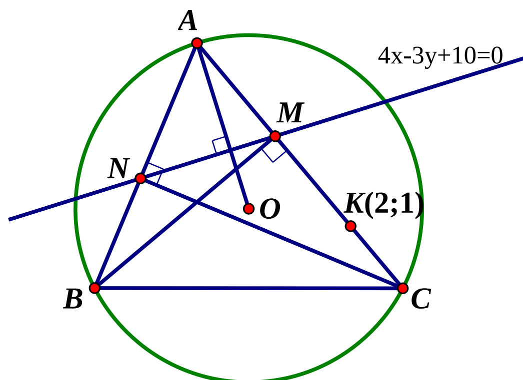
$$\begin{cases} 2a+4b+c=-5 \\ 6a+8b+c=-25 \\ -2a+4b+c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-5 \\ c=15 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $x^2+y^2-10y+15=0$

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (C) có phương trình là $x^2+y^2=25$, AC đi qua $K(2;1)$, hai đường cao BM và CN. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết A có hoành độ âm và đường thẳng MN có phương trình $4x-3y+10=0$

Giải

Chứng minh được $MN \perp OA \Rightarrow OA$ có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;4) \Rightarrow OA: 3x + 4y = 0$



Tọa độ A thỏa hệ: $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = -\dfrac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

(do $x_A < 0$).

Vậy $A(-4;3)$

AC nhận $\overrightarrow{AK} = (6;-2)$ làm vec-tơ chỉ phương

$\Rightarrow AC: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0$

Tọa độ C thỏa hệ $\begin{cases} x = 5 - 3y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$

Tọa độ M thỏa hệ $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 4x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2)$

BM qua M và vuông góc $AC \Rightarrow BM: 3(x+1) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 5 = 0$

Tọa độ B thỏa $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 10x^2 + 30x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$

Với $B(0;5)$ thì $\overrightarrow{BA} = (-4;-2)$ và $\overrightarrow{BC} = (9;2) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -40 < 0 \Rightarrow B$ tù.

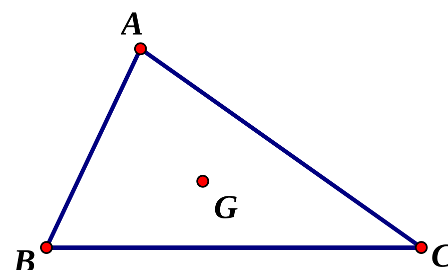
Với $B(-3;-4)$ thì $\overrightarrow{BA} = (-1;7)$ và $\overrightarrow{BC} = (8;4) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 20 > 0 \Rightarrow B$ nhọn.

Vậy $A(-4;3)$, $B(-3;-4)$ và $C(5;0)$.

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $AB = \sqrt{5}$, $C(-1;-1)$, đường thẳng AB có phương trình: $x + 2y - 3 = 0$ và trọng tâm tam giác ABC thuộc đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A và B.

Giải

Giả sử $A(3-2a;a)$; $B(3-2b;b)$



Tính trọng tâm tam giác $G\left(\dfrac{5-2a-2b}{3};\dfrac{a+b-1}{3}\right)$.

Vì G thuộc d nên ta có: $\dfrac{5-2a-2b}{3} + \dfrac{a+b-1}{3} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow a + b + 2 = 0$

Mặt khác $AB = \sqrt{5}$

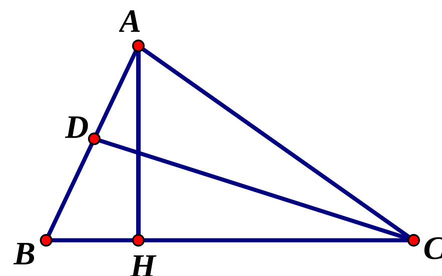
Từ đó giải hệ ta được: $A\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$ hoặc $B\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$, $A\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $B(2;-1)$, đường cao và phân giác trong quan đỉnh A và C lần lượt có phương trình $3x - 4y + 27 = 0$ và $x + 2y - 5 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải

Phương trình cạnh $BC: 4x + 3y - 5 = 0$

Tọa độ C là nghiệm hệ: $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3)$



Gọi B′ là điểm đối xứng của B qua CD $\Rightarrow B' \in AC$

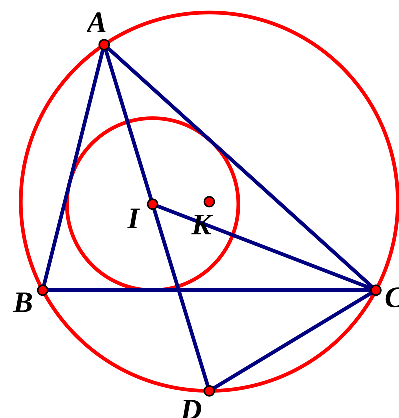
Tìm được B′ $\Rightarrow$ phương trình AC: $y=3$

Tìm được $A(-5;3)$

Viết được phương trình AB: $4x+7y-1=0$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;5)$. Tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác lần lượt là $I(2;2)$ và $K\left(\frac{5}{2};3\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.

Giải



Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm $K\left(\frac{5}{2};3\right)$ bán kính $R=AK=\frac{5}{2}$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}$$

Phân giác AI có phương trình $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-5}{2-5} \Leftrightarrow 3x+y-8=0$

Gọi $D=AI\cap(K) \Rightarrow$ tọa độ của D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+y-8=0 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4} \end{cases}$

Giải ra ta được hai nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

Lại có: $ICD=ICB+BCD=\frac{C}{2}+\frac{A}{2}=ICA+IAC=CID \Rightarrow \Delta ICD$ cân tại D $\Rightarrow DC=DI$ mà $DC=DB \Rightarrow$

B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4} \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=DI^2=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy B, C có tọa độ là $(1;1), (4;1)$

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ΔABC có diện tích $S=3$, $B(-2;1)$, $C(1;-3)$ và trung điểm I của AC thuộc đường thẳng $(d): 2x+y=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Giải

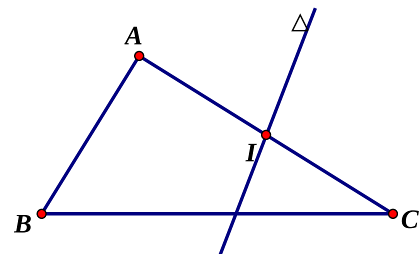
$I\in(d) \Rightarrow I(x;-2x)$. Vì I là trung điểm của AC nên $A(2x-1;-4x+3)$. Có $\overrightarrow{BC}=(3;-4) \Rightarrow BC=5$

Phương trình của BC là: $4x+3y+5=0$

$d(A;BC)=\frac{|-4x+10|}{5}$, $S=\frac{1}{2}d(A,BC).BC$ mà

$S=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{|-4x+10|}{5}.5=3$

$\Leftrightarrow|5-2x|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$



Suy ra $A(1;-1)$, $A(7;-13)$

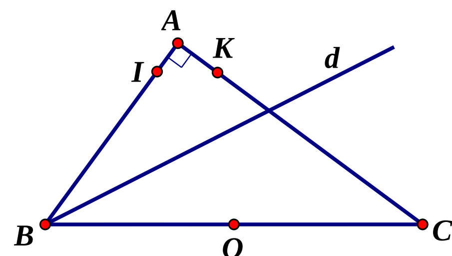
Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, biết B và C đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là đường thẳng $(d):x+2y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$.

Giải

$B\in(d):x+2y-5=0$ nên gọi $B(5-2b;b)$. Vì B, C đối xứng với nhau qua O suy ra $C(2b-5;-b)$ và $O(0;0)\in BC$

Gọi I đối xứng với O qua phân giác trong góc B là $(d):x+2y-5=0\Rightarrow I(2;4)$ và $I\in AB$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{BI}=(2b-3;4-b)$ vuông góc với $\overrightarrow{CK}=(11-2b;2+b)$



$\Rightarrow(2b-3)(11-2b)+(4-b)(2+b)=0\Leftrightarrow-5b^2+30b-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=5\end{array}\right.$

Với $b=1\Rightarrow B(3;1), C(-3;-1)\Rightarrow A(3;1)\equiv B$ loại.

Với $b=5\Rightarrow B(-5;5), C(5;-5)\Rightarrow A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$. Vậy $A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$, $B(-5;5)$, $C(5;-5)$

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A là điểm $D\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

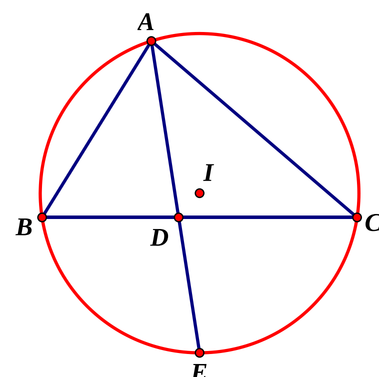
Giải

Gọi E là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có phương trình đường thẳng $AD:x-2=0$. Do E thuộc đường thẳng AD nên $E(2;t)$. Mặt khác do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$IA=IE\Leftrightarrow\sqrt{(t-1)^2+\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+5^2}$

$\Leftrightarrow(t-1)^2=5^2\Leftrightarrow t=6\vee t=-4$

Do đó ta được $E(2;-4)$

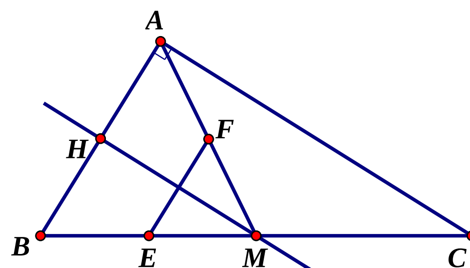


Do AD là phân giác nên E là điểm chính giữa cung BC suy ra IE vuông góc với BC hay BC nhận $\overrightarrow{EI}=-\frac{5}{2}(1;-2)$ là vec-tơ pháp tuyến.

Do đó phương trình của BC là: $1.(x-2)-2.\left(y+\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x-2y-5=0$. Vậy BC: $x-2y-5=0$.

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đường thẳng AB và đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác lần lượt có phương trình $4x+3y+1=0$ và $7x-y+8=0$. Điểm $E(10;3)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải



Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x+3y+1=0\\7x-y+8=0\end{cases} \Rightarrow A(-1;1)$

Gọi F là điểm thuộc AM sao cho $EF//AB$. Suy ra EF có phương trình $4x+3y-49=0$. Vì F thuộc AM nên tạo độ của điểm F là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x+3y-49=0\\7x-y+8=0\end{cases} \Rightarrow F(1;15)$

Đường trung trực d của EF có phương trình $6x-8y+30=0$

Do ΔMAB cân tại M, nên ΔMEF cân tại M. Suy ra d đi qua trung điểm H của AB và trung điểm M của BC.

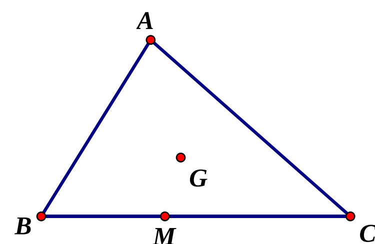
Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}6x-8y+39=0\\7x-y+8=0\end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$, suy ra $C(3;4)$

Tọa độ điểm H thỏa mãn hệ: $\begin{cases}4x+3y+1=0\\6x-8y+39=0\end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{5}{2};3\right)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH}$ suy ra $B(-4;5)$

Vậy $A(-1;1)$, $B(-4;5)$, $C(3;4)$

Bài 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB:2x+y-1=0$, phương trình cạnh $AC:3x+4y+6=0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết $M(1;-3)$ nằm trên cạnh BC thỏa mãn: $3MB=2MC$.

Giải



Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+4y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$ hay $A(2;-3)$

Gọi $B(b;1-2b)$, $C\left(c;\frac{-3c-6}{4}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB}=(b-1;4-2b)$, $\overrightarrow{MC}=\left(c-1;\frac{-3c+6}{4}\right)$

Do M nằm trên cạnh BC và $3MB=2MC$ nên ta có: $3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$

hay $\begin{cases}3(b-1)=-2(c-1)\\3(4-2b)=-2\left(\frac{-3c+6}{4}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3b+2c=5\\4b+c=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\c=-2\end{cases}$

Vậy $A(2;-3)$, $B(3;-5)$, $C(-2;0)$ nên tam giác ABC có trọng tâm $G\left(1;-\frac{8}{3}\right)$

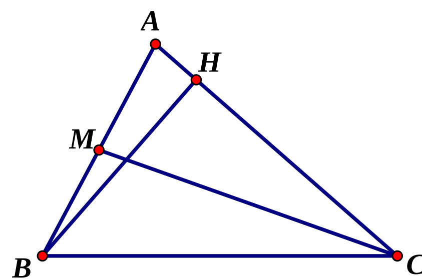
Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(3;0)$, đường cao từ đỉnh B có phương trình $x+y+1=0$, trung tuyến từ đỉnh C có phương trình $2x-y-2=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

AC qua điểm $A(3;0)$ và vuông góc $BH \Rightarrow AC: x-y-3=0$

$C = AC \cap CM \Rightarrow$ tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow C(-1;-4)$$



Gọi $B(x_B;y_B) \Rightarrow M\left(\frac{x_B+3}{2};\frac{y_B}{2}\right)$ (M là trung điểm AB)

Ta có B thuộc BH và M thuộc CM nên:

$$\begin{cases} x_B+y_B+1=0 \\ x_B+3-\frac{y_B}{2}-2=0 \end{cases} \Rightarrow B(-1;0)$$

Gọi phương trình đường tròn qua A, B, C có dạng: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào phương trình đường tròn ta có:

$$\begin{cases} 6a+c=-9 \\ -2a+c=-1 \\ -2a-8b+c=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$$

Phương trình đường tròn qua A, B, C là $(C): x^2+y^2-2x+4y-3=0$

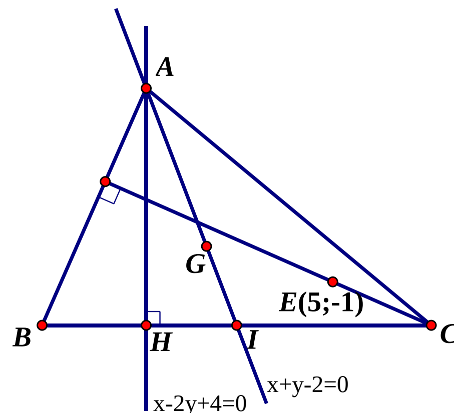
Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung tuyến $AI: x+y-2=0$, đường cao $AH: x-2y+4=0$ và trọng tâm G thuộc trục hoành. Tìm tọa độ của B và C, biết $E(5;-1)$ thuộc đường cao qua C.

Giải

$A(0;2)$, $G(2;0)$, $I(3;-1)$, $BC: 2x+y-5=0$

$B \in BC \Rightarrow B(t;5-2t) \Rightarrow C(6-t;2t-7)$

$\overrightarrow{AB}=(t;3-2t)$, $\overrightarrow{EC}=(1-t;2t-6)$



Ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}=0 \Leftrightarrow t(1-t)+(3-2t)(2t-6)=0$

$\Leftrightarrow 5t^2-19t+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{9}{5} \end{array}\right.$

Vậy $B(2;1)$, $C(4;-3)$ hoặc $B\left(\frac{9}{5};\frac{7}{5}\right)$, $C\left(\frac{21}{5};-\frac{17}{5}\right)$

Bài 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;6)$, trực tâm $H(1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(2;3)$. Tìm tọa độ B, C; biết B có hoành độ dương.

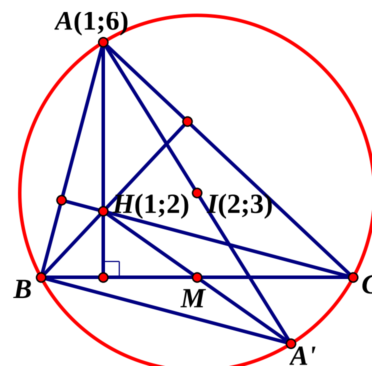
Giải

Gọi A′ là điểm đối xứng với A qua I $\Rightarrow$ HBA′C là hình bình hành với tâm M.

$\Rightarrow A'(3;0) \Rightarrow M(2;1)$

BC qua M và vuông góc với $AH \Rightarrow BC: y=1$

$B \in BC \Rightarrow B(t;1)$, $t>0$



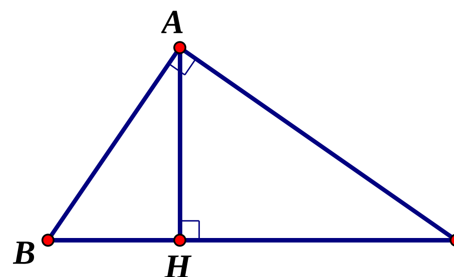
Ta có: $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{(t-2)^2+2^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2-\sqrt{6} \text{ (loại)} \\ t = 2+\sqrt{6} \Rightarrow B\left(2+\sqrt{6};1\right) \end{array}\right.$

M là trung điểm BC, suy ra $C\left(2-\sqrt{6};1\right)$

Vậy $B\left(2+\sqrt{6};1\right), C\left(2-\sqrt{6};1\right)$

Bài 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường cao $AH: x-y+3=0$. Biết đỉnh $C(5;0)$, đỉnh B thuộc trục tung. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.

Giải



Phương trình cạnh BC là $x+y-5=0$

$B = BC \cap Oy \Rightarrow B(0;5)$

Giả sử $A(t;t+3) \in AH; \overrightarrow{AB} = (-t;2-t), \overrightarrow{AC}(5-t;-t-3)$

Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 3$

$\Rightarrow A(-1;2)$ hoặc $A(3;6)$

Bài 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-3;4)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x+y-1=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(1;7)$. Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC.

Giải

Ta có $IA=5$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC có dạng $(C):(x-1)^2+(y-7)^2=25$

Gọi D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Tọa độ của D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ (x-1)^2+(y-7)^2=25 \end{cases} \Rightarrow D(-2;3)$$

Vì AD là phân giác trong của góc A nên D là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Do đó $ID \perp BC$ hay đường thẳng BC nhận vec-tơ $\overrightarrow{DI} = (3;4)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Phương trình cạnh BC có dạng $3x+4y+c=0$

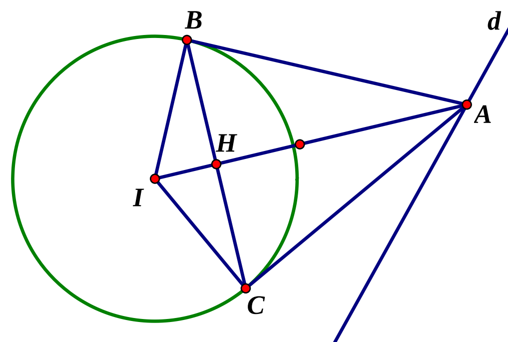
Do $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta IBC}$ nên $AH = 4IK$

Mà $AH = d(A;BC) = \dfrac{|7+c|}{5}$ và $IK = d(I;BC) = \dfrac{|31+c|}{5}$ nên $|7+c| = 4|31+c| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = -\dfrac{114}{3} \\ c = -\dfrac{131}{5} \end{array}\right.$

Vậy phương trình cạnh BC là: $9x+12y-114=0$ hoặc $15x+20y-131=0$

Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: $x-y+3=0$. Qua điểm A thuộc d kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=4$ tại B và C. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ của điểm A, biết đoạn AG bằng 2.

Giải



(C) có tâm $I(2;1), R=2$. Gọi H là giao của AI và BC

$\Rightarrow AH=\frac{3}{2}AG=3$

Đặt $t=AI, t>0$. Ta có:

$AB^2=t^2-4$, $AH.AI=AB^2$, $AH=3$

Suy ra $t^2-4=3t \Leftrightarrow t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow t=4$ (thỏa mãn) hoặc $t=-1$ (không thỏa mãn)

$A\in d \Leftrightarrow A(a;a+3)$ ta có:

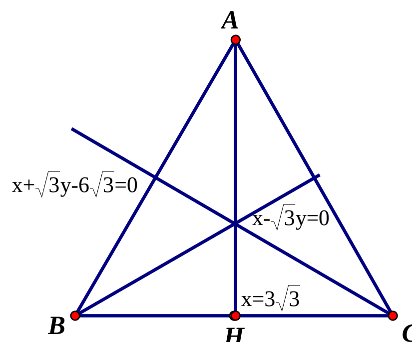
$IA^2=16 \Leftrightarrow (a-2)^2+(a+2)^2=16 \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 2$

Vậy $A(2;5)$ và $A(-2;1)$

Bài 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường cao AH: $x=3\sqrt{3}$, hai phương trình đường phân giác trong góc ABC và ACB lần lượt là $x-\sqrt{3}y=0$ và $x+\sqrt{3}y-6\sqrt{3}=0$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 3. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết đỉnh A có tung độ dương.

Giải

Chứng minh tam giác ABC đều.



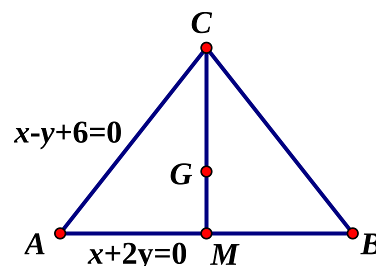
Do đường cao AH: $x=3\sqrt{3}$ nên đường thẳng BC song song hoặc trùng với trục hoành Ox. Tâm đường tròn nội tiếp $I(3\sqrt{3};3)$, bán kính bằng $3\Rightarrow$ pt BC: $y=0$ hoặc $y=6$

Nếu pt BC: $y=6$ thì tung độ của A bằng -3 (loại) $\Rightarrow$ pt BC: $y=0$. Tọa độ các điểm $B(0;0)$, $C(6\sqrt{3};0)$

Đường thẳng AB có hệ số góc $k=\sqrt{3}$, đường thẳng AC có hệ số góc $k'=-\sqrt{3}$. Phương trình lần lượt là $y=\sqrt{3}x$ và $y=-\sqrt{3}x+18$

Bài 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại C, các đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình là $x+2y=0$ và $x-y+6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết trọng tâm G nằm trên trục tung.

Giải



Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y=0\\x-y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}\Rightarrow A(-4;2)$$

Gọi $G(0;a)$, do CG vuông góc với AB nên phương trình đường thẳng CG là $2x-y+a=0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+a=0\\x-y+6=0\end{cases}\Rightarrow C(6-a;12-a)$

Gọi M là trung điểm của AB thì M là giao của CG và AB, suy ra tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y+a=0\\x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{2a}{5}\\y=\dfrac{a}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(-\dfrac{2a}{5};\dfrac{a}{5}\right)$

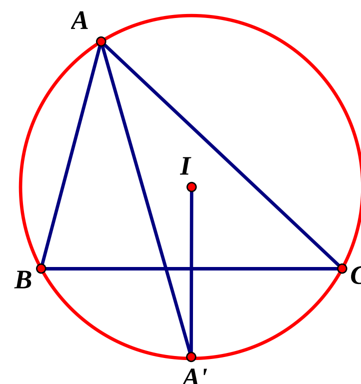
Suy ra tọa độ của B là $\left(-\dfrac{4a}{5}+4;\dfrac{2a}{5}-2\right)$

G là trọng tâm nên $x_A+x_B+x_C=3x_G\Leftrightarrow -4-\dfrac{4a}{5}+4+6-a=0\Leftrightarrow a=\dfrac{10}{3}$

Vậy $A(-4;2)$, $B\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{26}{3}\right)$

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$ và (T) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 4x+2y-19=0$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y-1=0$ (d). Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC và điểm A có tung độ âm.

Giải



Đường tròn (T) có tâm $I\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$, bán kính $R=d(I,\Delta)=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ có pt: $x^2+y^2+3x-29=0$

Khi đó đường thẳng d cắt đường tròn (T) tại A và A′ có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2+3x-29=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-5\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Điểm A có tung độ âm suy ra $A(-4;-5)$ và $A'\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Vì d là phân giác trong của góc A nên cung $BA'=CA'\Rightarrow IA'\perp BC$

Phương trình đường thẳng BC có dạng $2x+y+m=0$

Mặt khác ta có:

$$S_{ABC}=3S_{IBA}\Leftrightarrow\frac{1}{2}d(A;BC).BC=3.\frac{1}{2}d(I;BC).BC\Leftrightarrow d(A;BC)=3d(I;BC)$$

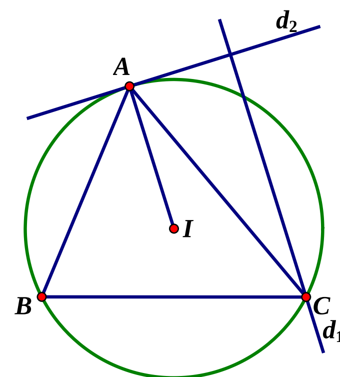
$$\Rightarrow\frac{|m-13|}{\sqrt{5}}=3.\frac{|m-3|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|m-13|=3|m-3|\Leftrightarrow m=-2\vee m=\frac{11}{2}$$

Với $m=-2$ khi đó BC: $2x+y-2=0$. Với $m=\dfrac{11}{2}$ khi đó BC: $4x+2y+11=0$

Vậy phương trình đường thẳng BC là: $2x+y-2=0$ và $4x+2y+11=0$

Bài 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$, $B(1;-2)$. Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng $d_1: x-y-1=0$ sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường thẳng $d_2: x+y-3=0$.

Giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì $A \in d_2$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với d_2 tại A.

Phương trình IA: $x - y + 1 = 0$.

Gọi $I(t; t+1)$, vì $IA = IB$ suy ra $t = -1$. Suy ra $I(-1; 0)$

Gọi $C(a; a-1)$, vì $IC = IA = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

Vậy $C\left(\sqrt{3}; \sqrt{3} - 1\right)$ hoặc $C\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{3} - 1\right)$

Bài 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$ và tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB, biết đường thẳng AB tạo với đường thẳng d góc 45^0.

Giải

Gọi vtpt của AB là $\vec{n} = (a; b)$, $\left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$

Theo giả thiết ta có:

$$\cos 45^0 = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n_d}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n_d}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Vì tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm $I(1; -2)$, $R = 3$

$$\Rightarrow d(I; AB) = \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}$$

Nếu $a = 0$, chọn $b = 1$ thì phương trình đường thẳng AB có dạng $y + m = 0$

$$d(I; AB) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

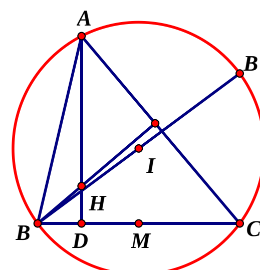
Nếu $b = 0$, chọn $a = 1$ thì phương trình đường thẳng AB có dạng: $x + m = 0$

$$d(I; AB) = \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 đường thẳng AB thỏa mãn bài toán có phương trình là: $2y + 1 = 0$; $2y + 7 = 0$; $2x + 1 = 0$ và $2x - 5 = 0$.

Bài 38. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(-6; 7)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1; 1)$ và $D(0; 4)$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC. Tìm tọa độ đỉnh A.

Giải



Ta có $\overrightarrow{HD} = (6; -3)$, suy ra phương trình BC: $2x - y + 4 = 0$

Phương trình DH: $x + 2y - 8 = 0$

Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có $IM = d(I, BC) = \sqrt{5}$

Kẻ đường kính BB′, khi đó AHB′C là hình bình hành nên $AH = B'C = 2IM = 2\sqrt{5}$

Vì $A\in DH\Rightarrow A(8-2a;a)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2a-14;7-a)$

Suy ra $(2a-14)^2+(a-7)^2=20\Rightarrow (a-7)^2=4\Rightarrow a=9;a=5$

Vậy $A(2;5)$ hoặc $A(-10;9)$

Bài 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Gọi N là trung điểm của AB. Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C của tam giác ABC. Tìm tọa độ của đỉnh A biết rằng $E(7;1)$, $F\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ và phương trình đường thẳng CN là $2x+y-13=0$.

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì $G\in CN\Rightarrow G(t;13-2t)$. Do tam giác ABC cân tại A nên ta có:

$$GE^2=GF^2\Leftrightarrow (t-7)^2+(13-2t-1)^2=\left(t-\frac{11}{5}\right)^2+\left(13-2t-\frac{13}{5}\right)^2\Leftrightarrow t=5$$

$\Rightarrow G(5;3)$

Ta có $AG\perp EF\Rightarrow \overrightarrow{u_{AG}}=(1;3)$. Phương trình đường thẳng AG là $\begin{cases}x=5+t\\ y=3+3t\end{cases}$

$\Rightarrow A(5+a;3+3a)$

$C\in CN\Rightarrow C(c;13-2c)$

Từ đó suy ra $\begin{cases}x_B=3x_G-x_A-x_C=10-a-c\\ y_B=3y_G-y_A-y_C=-7-3a+2c\end{cases}\Rightarrow B(10-a-c;-7-3a+2c)$

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(a+2c-10;3a-4c+20)\perp \overrightarrow{u_{AG}}=(1;3)$

$\Leftrightarrow 1(a+2c-10)+3(3a-4c+20)=0\Leftrightarrow a=c-5$

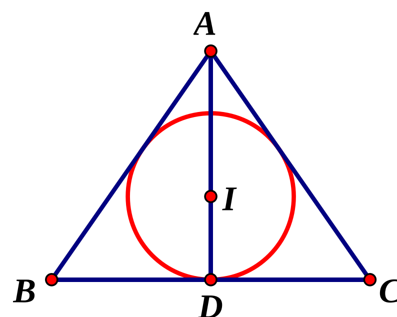
Suy ra $B(15-2c;8-c)$. Ta có $\overrightarrow{EB}=(8-2c;7-c)$, $\overrightarrow{EC}=(c-7;12-2c)$. Vì $EB\perp EC$ nên ta có $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}=0$

$\Leftrightarrow (8-2c)(c-7)+(7-c)(12-2c)=0\Leftrightarrow 28-4c=0\Leftrightarrow c=7,a=c-5=2$

Vậy $A(7;9)$, $B(1;1)$, $C(7;-1)$

Bài 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$, $B(5;-1)$ và $C(-3;-1)$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải



Gọi D là chân đường phân giác của A, I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có $BC=8$, $AC=5$, $AB=5\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A $\Rightarrow$ D là trung điểm của BC $\Rightarrow D(1;-1)$

Ta có $BD=4$, trong ΔBAD có:

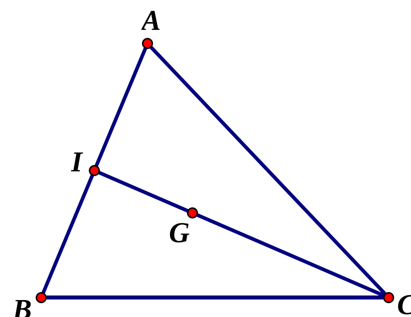
$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}\Rightarrow \overrightarrow{IA}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{ID}\Rightarrow I\left(1;\frac{1}{3}\right)$

Do ΔABC cân tại A nên $r=ID=\frac{4}{3}$. Vậy phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC là: $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

Bài 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình $x+2y-3=0$. Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng (d): $x+y-2=0$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B của tam giác.

Giải

Gọi $I(x;y)$ là trung điểm của cạnh AB, G là trọng tâm tam giác.



Ta có: $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{2x-1}{3}\\ y_G=\frac{2y-1}{3}\end{cases}$

G thuộc d: $x+y-2=0$ nên $\frac{2x-1}{3}+\frac{2y-1}{3}-2=0$

Tọa độ I thỏa mãn hệ $\begin{cases}\frac{2x-1}{3}+\frac{2y-1}{3}-2=0\\ x+2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-1\end{cases}$

Do A thuộc $x+2y-3=0$ nên tọa độ A là $A(3-2a;a)$

Theo giả thiết $AB=\sqrt{5}\Rightarrow IA=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow IA^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow(2+2a)^2+(a+1)^2=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\vee a=-\frac{3}{2}$

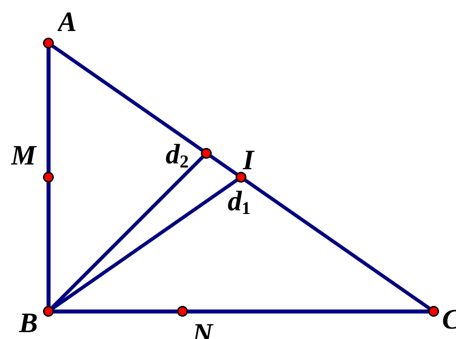
Từ đó tìm được $A\left(4;-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(6;-\frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(6;-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(4;-\frac{1}{2}\right)$

Bài 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trung tuyến và phân giác trong đỉnh B có phương trình lần lượt là $(d_1):2x+y-3=0$, $(d_2):x+y-2=0$. Điểm $M(2;1)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Biết đỉnh A có hoành độ dương, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

$(d_1)\cap(d_2)=B(1;1)\Rightarrow PT\ AB:y=1$

$\Rightarrow A(a;1)$



Gọi N là đối xứng của M qua phân giác (d_2):

$\Rightarrow N(1;0)\Rightarrow Pt\ BC:x=1\Rightarrow C(1;c)$

Trung điểm AC là $I\left(\frac{1+a}{2};\frac{1+c}{2}\right)$,

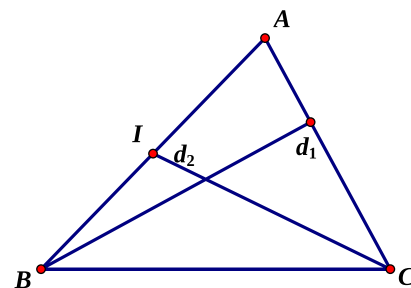
do I thuộc trung tuyến $\Rightarrow 2a+c-3=0$ (1)

dễ thấy tam giác ABC vuông ở B, $IB=\sqrt{5}\Rightarrow(a-1)^2+(c-1)^2=20$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\ a=-1\ (\text{loại})\end{array}\right.\Rightarrow A(3;1),\ C(1;-3)$

Bài 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(2;1)$, đường cao đỉnh B và trung tuyến đỉnh C có phương trình lần lượt là $(d_1):2x-y=0$; $(d_2):x-y=0$. Viết phương trình cạnh BC.

Giải



Pt AC: $x+2y-4=0$. Giải hệ

$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

$B\in d_1 \Rightarrow B(b;2b)$. Trung điểm của AB: $I\left(\frac{b+2}{2};\frac{2b+1}{2}\right)$, do

$I\in d_2 \Rightarrow b=1$

$\Rightarrow B(1;2)$

Pt BC: $2x+y-4=0$

Bài 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $C(5;1)$, trung tuyến AM, điểm B thuộc đường thẳng $x+y+6=0$. Điểm $N(0;1)$ là trung điểm của đoạn AM, điểm $D(-1;-7)$ không nằm trên đường thẳng AM và khác phía với A so với đường thẳng BC đồng thời khoảng cách từ A và D tới đường thẳng BC bằng nhau. Xác định tọa độ các điểm A, B.

Giải

Do A, D nằm khác phía so với BC và cách đều BC suy ra BC đi qua trung điểm I của AD.

Gọi $G(a;b)$ là giao điểm của DN và MI suy ra G là trọng tâm của tam giác ADM.

$\Rightarrow \overrightarrow{ND}=3\overrightarrow{NG} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=3a \\ -8=3(b-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua G và C: $x-2y-3=0$

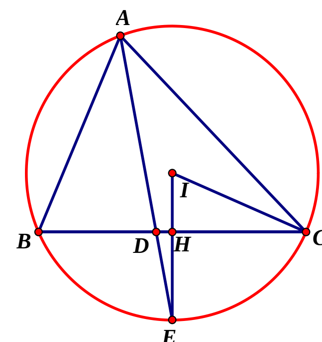
Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ x+y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-3)$

$\Rightarrow M(1;-1) \Rightarrow A(-1;3)$.

Vậy $A(-1;3)$, $B(-3;-3)$

Bài 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(2;1)$, phương trình đường phân giác trong góc BAC là $x-y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết rằng $BC=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ và góc BAC nhọn.

Giải



Vì AD là phân giác trong góc A nên AD cắt đường tròn (ABC) tại E là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow IE\perp BC$

Vì E thuộc đường thẳng $x-y=0$ và $IE=IA=R \Rightarrow E(0;0)$.

Chọn $\overrightarrow{n_{BC}}=\overrightarrow{EI}=(2;1) \Rightarrow$ Pt BC có dạng $2x+y+m=0$.

Từ giả thiết $\Rightarrow HC=\frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow IH=\sqrt{IC^2-HC^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow d(I;BC)=\frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|m+5|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} BC: 2x+y-2=0 \\ BC: 2x+y-8=0 \end{array}\right.$

Vì BAC nhọn nên A và I phải cùng phía đối với BC, kiểm tra thấy BC: $2x+y-2=0$ thỏa mãn.

Từ hệ $\begin{cases}2x+y-2=0\\(x-2)^2+(y-1)^2=5\end{cases}\Rightarrow B(0;2),\ C\left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$ hoặc $B\left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right),\ C(0;2)$

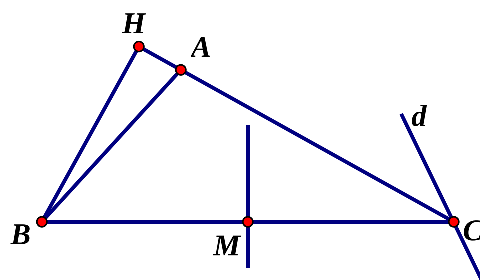
Bài 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B là $x+3y-18=0$, phương trình đường thẳng trung trực của đoạn thẳng BC là $3x+19y-279=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d:2x-y+5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng $BAC=135^0$.

(Trích Trường THPT Chuyên ĐH Vinh lần 2 – 2014)

Giải

$B\in BH: x=-3y+18\Rightarrow B(-3b+18;b)$

$C\in d: y=2x+5\Rightarrow C(c;2c+5)$



Từ giả thiết suy ra B đối xứng C qua đường trung trực $\Delta: 3x+19y-279=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{BC}=0\\M\in\Delta\end{cases}$ (M là trung điểm BC)

$\Leftrightarrow\begin{cases}60b+13c=357\\10b+41c=409\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\c=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B(6;4)\\C(9;23)\end{cases}$

$AC\perp BH\Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{n_{AC}}=\overrightarrow{u_{BH}}=(-3;1)\Rightarrow$ pt AC: $-3x+y+4=0\Rightarrow A(a;3a-4)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(6-a;8-3a),\ \overrightarrow{AC}=(9-a;27-3a)$

Ta có $A=135^0\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow\frac{(6-a)(9-a)+(8-3a)(27-3a)}{\sqrt{(6-a)^2+(8-3a)^2}.\sqrt{(9-a)^2+(27-3a)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(9-a)(3-a)}{|9-a|\sqrt{a^2-6a+10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}3<a<9\\2(3-a)^2=a^2-6a+10\end{cases}\Leftrightarrow a=4.$$

Suy ra $A(4;8)$.

Bài 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=5$. Chân đường cao kẻ từ B và C lần lượt là $H(3;3)$ và $K(0;-1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK, biết A có tung độ dương.

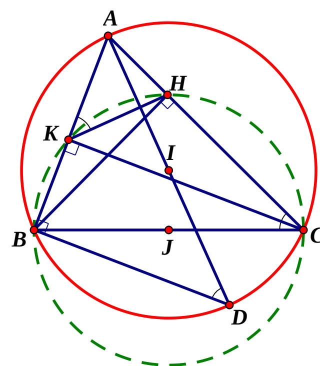
Giải

Gọi D là điểm đối xứng với A qua I, suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó $BAD+ADB=90^0$ (1)

Tứ giác BCHK là tứ giác nội tiếp nên $AKH=ACB$ (2)

Lại có $ACD=ADB$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $BAD+AKH=90^0$ hay $AD\perp KH$



Ta có $\overrightarrow{KH}=(3;4)\Rightarrow$ pt AD: $\begin{cases}x=1+4t\\y=2-3t\end{cases}\Rightarrow A(1+4a;2-3a)$

Ta có $IA=R$

$\Leftrightarrow\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}=5\Leftrightarrow 5|a|=5\Leftrightarrow a=\pm1$

Suy ra $A(5;-1)$, $A(-3;5)$. Do A có tung độ dương nên $A(-3;5)$

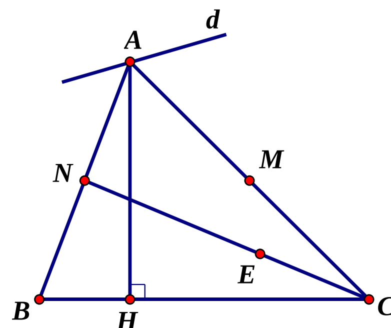
Ta có $\overrightarrow{AK}=(3;-6)$, suy ra pt AB là: $\begin{cases}x=t\\y=-1-2t\end{cases}\Rightarrow B(b;-1-2b)$. Vì $IB=5$ nên $B(1;-3)$

$\overrightarrow{AH}=(6;-2)$, suy ra pt AC là: $\begin{cases}x=3+3t\\y=3-t\end{cases}\Rightarrow C(3+3c;3-c)$. Vì $IC=5$ nên $C(6;2)$

Ta có $BC=5\sqrt{2}$, trung điểm BC là $J\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK nhận BC làm đường kính nên có phương trình: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

Bài 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;1)$ là trung điểm cạnh AC, điểm $H(0;-3)$ là chân đường cao kẻ từ A, điểm $E(23;-2)$ thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ C. Tìm tọa độ điểm B biết điểm A thuộc đường thẳng $d:2x+3y-5=0$ và điểm C có hoành độ dương.

Giải



$A\in d:2x+3y-5=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-3t\\y=1+2t\end{cases}\Rightarrow A(-3a+1;2a+1)$

Vì $M(2;1)$ là trung điểm AC nên suy ra $C(3+3a;1-2a)$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{HA}=(-3a+1;2a+4)\\\overrightarrow{HC}=(3+3a;4-2a)\end{cases}$

Vì $AHC=90^0$ nên $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-\frac{19}{13}\end{array}\right.$

Với $a=1\Rightarrow A(-2;3)$, $C(6;-1)$ thỏa mãn.

Với $a=-\frac{19}{13}\Rightarrow C\left(-\frac{18}{13};\frac{51}{13}\right)$ không thỏa mãn.

Với $A(-2;3)$, $C(6;-1)$ ta có phương trình CE: $x+17y+11=0$, phương trình BC: $x-3y-9=0$.

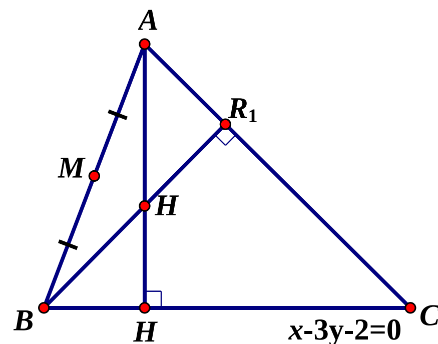
Suy ra $B(3b+9;b)\in BC\Rightarrow$ trung điểm AB là $N\left(\frac{3b+7}{2};\frac{b+3}{2}\right)$

Mà $N\in CE\Rightarrow b=-4\Rightarrow B(-3;-4)$

Bài 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tọa độ trực tâm $H(3;-2)$, trung điểm của đoạn AB là $M\left(\frac{1}{2};0\right)$ và phương trình cạnh BC là: $x-3y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

(Trích Sở Giáo dục và Đào tạo Vĩnh Phúc lần 1 – 2014)

Giải



Phương trình AH:

$3(x-3)+1.(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x+y-7=0$

Do $A \in AH; B \in BC$.

Đặt $A(x_1;7-3x_1)$, $B\left(x_2;\frac{x_2-2}{3}\right)$

M là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ (7-3x_1)+\frac{x_2-2}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow A(2;1), B(-1;-1)$

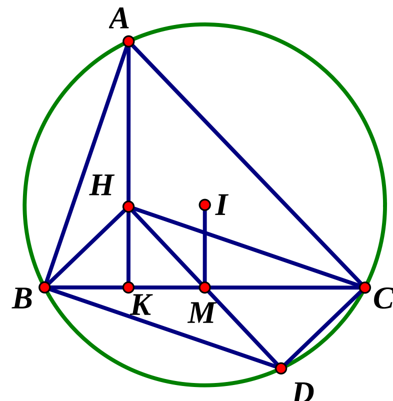
Đặt $C\left(x_3;\frac{x_3-2}{3}\right)$. Có $\overrightarrow{AC}=\left(x_3-2;\frac{x_3-2}{3}-1\right)$; $\overrightarrow{BH}=(4;-1)$

Vì $BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow 4(x_3-2)-1.\frac{x_3-5}{3}=0 \Leftrightarrow x_3=\frac{19}{11} \Rightarrow C\left(\frac{19}{11};-\frac{1}{11}\right)$

Vậy $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C\left(\frac{19}{11};-\frac{1}{11}\right)$

Bài 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(1;0)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và chân đường cao kẻ từ đỉnh A là $K(0;2)$. Tìm tọa độ A, B, C.

Giải



Gọi M là trung điểm BC.

Phương trình đường cao $AH: 2x+y-1=0$

Phương trình đường thẳng BC: $x-2y+4=0$

Phương trình đường trung trực IM vuông góc với BC: $2x+y-\frac{9}{2}=0$

Tọa độ điểm M là $\left(1;\frac{5}{2}\right)$

Gọi D là điểm đối xứng với A qua I. Ta có $\begin{cases} DB \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DB//CH$

Tương tự $DC//BH$ nên tứ giác HBDC là hình bình hành nên M là trung điểm HD.

Xét tam giác AHD có IM là đường trung bình nên $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM} \Rightarrow A(2;-2)$

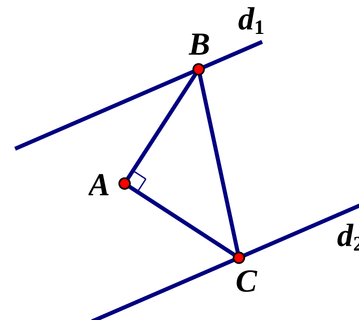
Giả sử $B(2b-4;b) \Rightarrow C(6-2b;5-b)$. Ta có $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow (5-2b)(4-2b)-b(7-b)=0 \Leftrightarrow b^2-5b+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=4 \end{array}\right.$

Vậy $A(2;-2)$, $B(-2;1)$, $C(4;4)$ hoặc $A(2;-2)$, $B(4;4)$, $C(-2;1)$

Bài 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;2)$, các đường thẳng $(d_1): x+y-3=0$ và đường thẳng $(d_2): x+y-9=0$. Tìm tọa độ điểm B thuộc (d_1) và điểm C thuộc (d_2) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Giải



Ta có : $B \in d_1 \Rightarrow B(a;3-a)$, $C \in d_2 \Rightarrow C(b;9-b) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (a-3;1-a)$,

$\overrightarrow{AC} = (b-3;7-b)$. ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB^2 = AC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - 10a - 4b + 16 = 0 & (1) \\ 2a^2 - 8a = 2b^2 - 20b + 48 & (2) \end{cases}$

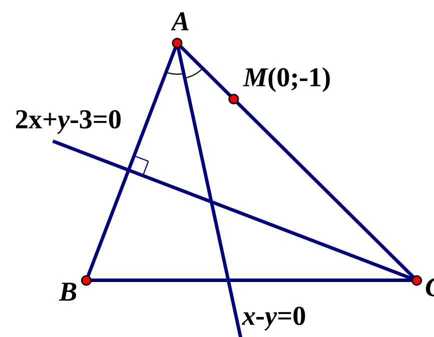
$(1) \Leftrightarrow b = \dfrac{5a-8}{a-2}$ (do $a = 2$ không thỏa mãn hệ). Thế vào (2) tìm được $a = 0, a = 4$.

Với $a = 0$ ta có $b = 4$. Vậy $B(0;3)$ và $C(4;5)$

Với $a = 4$ ta có $b = 6$. Vậy $B(4;-1)$ và $C(6;3)$

Bài 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, đường phân giác trong của góc A và đường cao kẻ từ đỉnh C lần lượt có phương trình $x - y = 0$, $2x + y - 3 = 0$. Đường thẳng AC đi qua điểm $M(0;-1)$, biết $AB = 3AM$. Tìm tọa độ đỉnh B.

Giải



Đặt $AD: x - y = 0$, $CH: 2x + y - 3 = 0$. Gọi M′ là điểm đối xứng với M qua đường phân giác AD $\Rightarrow M' \in AB$. Ta tìm được $M'(-1;0)$. Đường thẳng AB qua M′ và vuông góc với CH nên có phương trình AB: $x - 2y + 1 = 0$

$A = AB \cap AH$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

Giả thiết $AB = 3AM \Leftrightarrow AB = 3\sqrt{5} \Rightarrow$ B thuộc đường tròn (C′) tâm A bán kính $R = 3\sqrt{5}$, pt (C′): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 45$

$B = AB \cap (C') \Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy $B(7;4)$ hoặc $B(-5;-2)$

Bài 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(4;3)$, đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác lần lượt có phương trình là $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC.

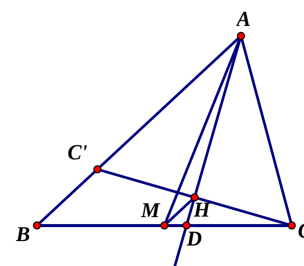
(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học – Huế lần 1 – 2014)

Giải

Gọi AD là phân giác trong và AM là trung tuyến. Tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 13y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy $A(9;-2)$. Từ đó phương trình AC là: $x + y - 7 = 0$.



Gọi C′ là điểm đối xứng của C qua đường phân giác trong AD thì C′ thuộc AB.

Đường thẳng CC′ qua $C(4;3)$ và vuông góc với AD nên có phương trình: $2x-y-5=0$.

Gọi H là giao điểm của CC′ và AD thì $H(3;1)$. Từ đó $C'(2;-1)$

Suy ra phương trình AB là $x+7y+5=0$

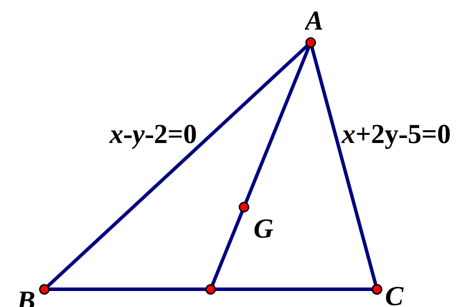
Đường thẳng MH qua $H(3;1)$ và song song với AB nên có phương trình $x+7y-10=0$

Vì M là giao điểm của MH và AM nên $M(-4;2)$. Suy ra phương trình BC là $x-8y+20=0$.

Thử lại thấy các điểm B, C nằm về hai phía của đường thẳng AD nên AD là đường phân giác trong của tam giác ABC. Vậy $AC: x+y-7=0$, $AB: x+7y+5=0$ và $BC: x-8y+20=0$.

Bài 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: x-y-2=0$, phương trình cạnh $AC: x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác $G(3;2)$. Viết phương trình cạnh BC.

Giải



Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow A(3;1)$

Gọi $B(b;b-2) \in AB$, $C(5-2c;c) \in AC$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} 3+b+5-2c=9 \\ 1+b-2+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=2 \end{cases}$.

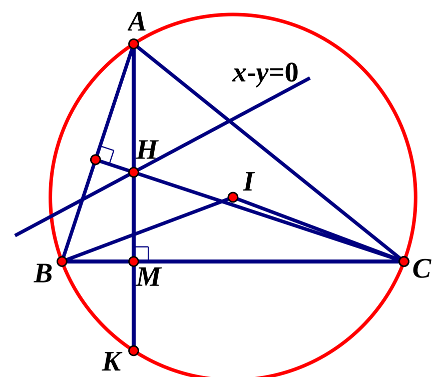
Hay $B(5;3)$, $C(1;2)$

Một vec-tơ chỉ phương của cạnh BC là $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(-4;-1)$

Phương trình cạnh BC là: $x-4y+7=0$

Bài 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;1)$ và nội tiếp đường tròn tâm $I(0;5)$. Biết đường cao từ A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại $K(3;9)$. Xác định trọng tâm G của tam giác IBC nếu trực tâm H của tam giác ABC thuộc $d: x-y=0$.

Giải



Ta có:

$\begin{cases} HBC = HAC \text{ (cùng phụ BAC)} \\ HAC = KAC = KBC \text{ (2 góc nối tiếp)} \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} HBC = KBC \\ \text{mà } BC \perp HK \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta BHK$ cân tại B

$\Rightarrow$ BC là trung trực HK

$HK \cap BC = \{M\} \Rightarrow M$ là trung điểm HK (1)

Phương trình đường thẳng AK: $x=3$

$AK \perp BC \Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC: $y=a$.

$\Rightarrow M(3;a)$

$(1) \Rightarrow \begin{cases} x_H + x_K = 2.x_M \\ y_H + y_K = 2.y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 6-3=3 \\ y_H = 2a-9 \end{cases}$. Mà $H \in d: x-y=0 \Rightarrow 3-(2a-9)=0 \Rightarrow a=6$

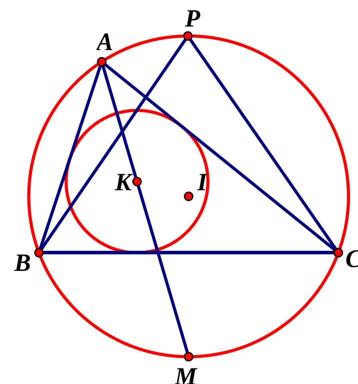
$\Rightarrow BC: y=6$. Tọa độ $B(b;6)$, tọa độ $C(c;6)$

Có: $IA=IB=IC=\sqrt{(3-0)^2+(1-5)^2}=5\Rightarrow\begin{cases}b^2+1^2=5^2\\c^2+1^2=5^2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=2\sqrt{6}\\c=-2\sqrt{6}\end{cases}\\\begin{cases}b=-2\sqrt{6}\\c=2\sqrt{6}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow b+c=0$

Trọng tâm tam giác IBC: $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_I+x_B+x_C}{3}=0\\y_G=\dfrac{y_I+y_B+y_C}{3}=\dfrac{17}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(0;\dfrac{17}{3}\right)$

Bài 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(0;1)$, ngoại tiếp $K(-1;5)$ và một điểm P chạy trên cung chứa A của (I). Tìm tọa độ P để $PB+PC$ lớn nhất biết $A(-3;3)$.

Giải



Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$(I):(x-0)^2+(y-1)^2=IA^2=3^2+2^2=13$

$\Leftrightarrow(I): x^2+(y-1)^2=13$

Phương trình AK: $\overrightarrow{AK}=(2;2)\Rightarrow\overrightarrow{n_{AK}}=(1;1)$

$\Rightarrow-(x+1)+(y-5)=0\Rightarrow AK: y-x-6=0$

Gọi $M=AK\cap(I)$; $M(a;b),(a;b)\neq(-3;3)$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2+(b-1)^2=13\\b-a-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(a+5)^2=13\\b=a+6\end{cases}$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}\text{(loại)}\\\begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow M(-2;4)$

$PB+PC$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ P là điểm chính giữa cung BAC.

Mà AK là phân giác của góc BAC nên M là điểm chính giữa cung BC không chứa A. vậy $PB+PC$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ P, I, M thẳng hàng.

Pt đường IM: $\overrightarrow{IM}=(-2;3)\Rightarrow\overrightarrow{n_{IM}}=(3;2)$

$\Rightarrow IM: 3(x-0)+2(y-1)=0\Leftrightarrow 3x+2y-2=0$

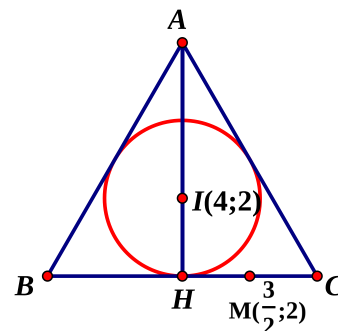
$P=IM\cap(I)$ nên tọa độ P là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}3x+2y-2=0\\x^2+(y-1)^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-1=-\dfrac{3}{2}x\\x^2+\dfrac{9}{4}x^2=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}x+1\\x=\pm2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy $P(2;-4)$

Bài 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC đều. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có phương trình $(x-4)^2+(y-2)^2=5$, đường thẳng BC đi qua $M\left(\frac{3}{2};2\right)$. Tìm tọa độ điểm A.

Giải



Gọi $(C):(x-4)^2+(y-2)^2=5 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(4;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Gọi H là trung điểm của BC, tam giác ABC đều $\Rightarrow$ I là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IH}$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$, $a^2+b^2\neq)$ là vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng BC: $a\left(x-\frac{3}{2}\right)+b(y-2)=0$

Ta có:

$$d(I;AB)=IH=R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{5a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 5a^2=4\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-2b \end{array}\right.$$

Trường hợp $a=2b \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng BC: $2x+y-5=0 \Rightarrow H(t;5-2t)$

$IH\perp BC \Rightarrow t=2 \Rightarrow H(2;1) \Rightarrow A(8;4)$

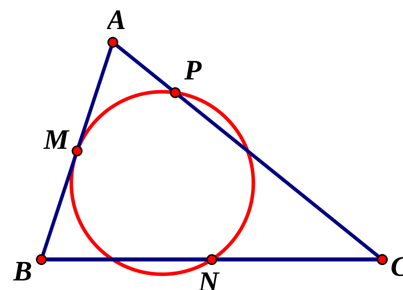
Trường hợp $a=-2b \Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC: $2x-y-1=0 \Rightarrow H(s;2s-1)$

$IH\perp BC \Rightarrow s=2 \Rightarrow H(2;3) \Rightarrow A(8;0)$

Vậy các điểm A thỏa mãn là $A(8;0)$; $A(8;4)$.

Bài 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2)$, $B(-2;-2)$, $C(4;-2)$. Gọi P là hình chiếu vuông góc của B trên AC; M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm M, N, P.

Giải



Ta có $\overrightarrow{AC}=(4;-4)$; $M(-1;0)$; $N(1;-2)$

Đường thẳng AC có phương trình: $x+y-2=0$

$\Rightarrow$ đường thẳng BP có phương trình: $x-y=0 \Rightarrow P(1;1)$

Giả sử đường tròn qua P, M, N có phương trình: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ $\left(a^2+b^2-c>0\right)$

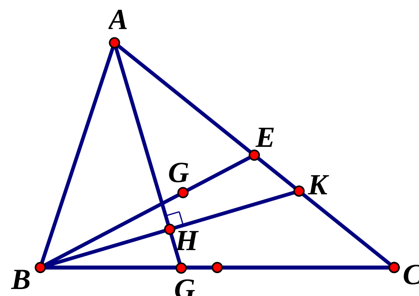
Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a+2b+c+2=0 \\ -2a+c+1=0 \\ 2a-4b+c+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-2 \end{cases}$

(thỏa mãn)

Vậy đường tròn cần tìm có phương trình: $x^2+y^2-x+y-2=0$

Bài 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12;1)$ và trọng tâm $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A có phương trình $x+2y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải



Gọi E là trung điểm AC $\Rightarrow \overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_E=\frac{13}{2} \\ y_E=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Gọi K là điểm đối xứng của B qua AD thì $K\in AC$.

Phương trình BK: $2x-y+25=0$

Gọi H là trung điểm BK thì $H\in AD$

Tọa độ $H(x;y):\begin{cases} 2x-y+25=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow H(-9;7)\Rightarrow K(-6;13)$

Phương trình của AC (phương trình của EK): $x+y-7=0$

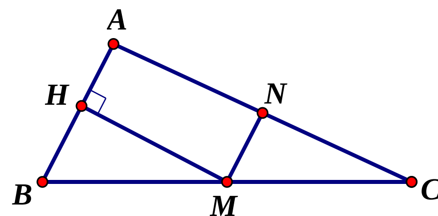
Ta có $AC\cap AD=A\Rightarrow A(9;-2)\Rightarrow C(4;3)$

Có $B(-12;1),\ C(4;3)\Rightarrow BC:\frac{x-4}{-12-4}=\frac{y-3}{1-3}\Leftrightarrow BC:x-8y+20=0$

Kết luận: Phương trình cạnh BC: $x-8y+20=0$

Bài 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 2. Phương trình của đường thẳng AB: $x-y=0$. Điểm $M(2;1)$ là trung điểm của cạnh BC. Tìm tọa độ trung điểm N của cạnh AC.

Giải



Khoảng cách từ M đến AB:

$$MH=d(M;AB)=\frac{|2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow S_{\Delta MAB}=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}MH.AB=1$$

$$\Leftrightarrow AB=\frac{2}{MH}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow MN=\sqrt{2}$$

Đường thẳng MN đi qua điểm $M(2;1)$ và nhận vtcp của đường thẳng AB là $\overrightarrow{u_{AB}}=(1;1)$ làm vtcp của nó.

Phương trình của đường thẳng MN là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \end{cases}$

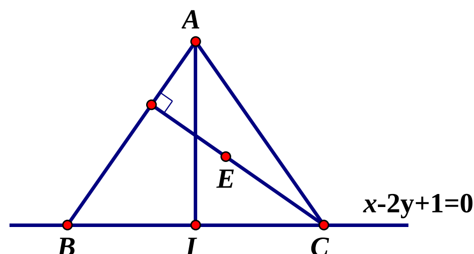
$N\in MN\Rightarrow N(2+t;1+t)$

$MN=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{2t^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\pm 1$

$\Rightarrow N(3;2),\ N(1;0)$

Bài 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, biết $A(3;-3)$, hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng $x-2y+1=0$, điểm $E(3;0)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh C. Tìm tọa độ hai đỉnh B và C.

Giải



Gọi I là trung điểm BC, do $I\in BC\Rightarrow I(2m-1;m)$.

Mà $A(3;-3)\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(2m-4;m+3)$

Do $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{u_{BC}}$ mà

$\overrightarrow{u_{BC}}=(2;1)\Rightarrow 2(2m-4)+(m+3)=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow I(1;1)$

$B\in BC\Rightarrow B(2b-1;b), b\in\mathbb{R}$. Do C đối xứng với B qua I, suy ra:

$C(3-2b;2-b)$, $\overrightarrow{AB}=(2b-4;b+3)$, $\overrightarrow{CE}=(2b;b-2)$

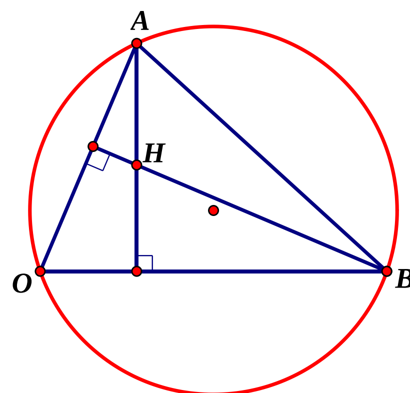
Do $AB\perp CE$ nên ta được $2b(2b-4)+(b-2)(b+3)=0\Leftrightarrow b=2; b=-\dfrac{3}{5}$

Với $b=2\Rightarrow B(3;2), C(-1;0)$

Với $b=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow B\left(-\dfrac{11}{5};-\dfrac{3}{5}\right), C\left(\dfrac{21}{5};\dfrac{13}{5}\right)$

Bài 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1;2)$ và điểm $B(3;5)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB (O là gốc tọa độ) và xác định tọa độ trực tâm tam giác OAB.

Giải



Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, $(a^2+b^2-c>0)$

Do $\begin{cases}O\in(C)\\A\in(C)\\B\in(C)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\1^2+2^2-2a-4b+c=0\\3^2+5^2-6a-10b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{43}{2}\\b=-\dfrac{19}{2}\\c=0\end{cases}$

Vậy $(C): x^2+y^2-43x+19y=0$

Gọi H là trực tâm tam giác OAB và $H(m;n)$. Ta có:

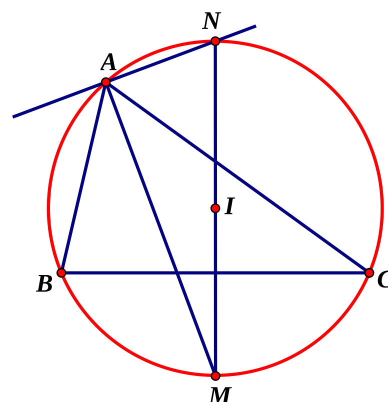
$\overrightarrow{AH}=(m-1;n-2), \overrightarrow{BH}=(m-3;n-5), \overrightarrow{OA}=(1;2), \overrightarrow{OB}=(3;5)$. H là trực tâm tam giác

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OB}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{OA}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(m-1)+5(n-2)=0\\1(m-3)+2(n-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-39\\n=26\end{cases}$

Vậy trực tâm $H(-39;26)$

Bài 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T). Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt đường tròn (T) lần lượt tại $M(0;-3)$ và $N(-2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết đường thẳng BC đi qua điểm $E(2;-1)$ và điểm C có hoành độ dương.

Giải



Do AM, AN lần lượt là đường phân giác trong và ngoài của góc A nên $MAN = 90^0$

Do A, M, N $\in (T) \Rightarrow MN$ là đường kính của (T) $\Rightarrow (T)$ có tâm $I(-1;-1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}MN = \sqrt{5}$

$\Rightarrow (T): (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

Có $IB = IC(= R)$, $MB = MC$ (do $BAM = CAM$)

$\Rightarrow IM \perp BC$

$\Rightarrow BC: \begin{cases} \text{đi qua điểm } E(2;-1) \\ \text{VTPT } \vec{n} = \overrightarrow{IM} = (1;-2) \end{cases}$

$\Rightarrow BC: x - 2 - 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$

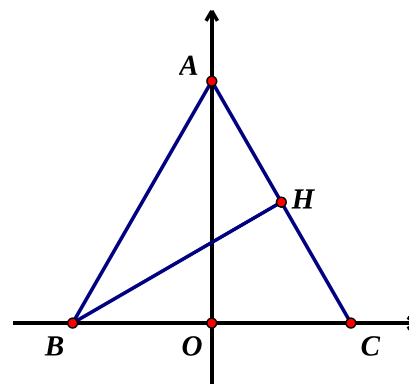
$\{B,C\} = BC \cap (T) \Rightarrow$ Tọa độ B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ 5y^2 + 22y + 21 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{6}{5}; y = -\frac{7}{5} \\ x = -2; y = -3 \end{array}\right.$. Do $x_C > 0 \Rightarrow C\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$, $B(-2;-3)$

Bài 64. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;2\sqrt{3})$, $B(-2;0)$ và $C(2;0)$, đường cao BH. Tìm hai điểm M và N trên đường thẳng chứa đường cao BH sao cho ba tam giác MBC, NBC và ABC có chu vi bằng nhau.

Giải



ΔABC đều cạnh bằng 4, M và N cần tìm thỏa điều kiện $MB + MC = NB + NC = 8$ nên M, N nằm trên (E) có hai tiêu điểm $B(-2;0)$ và $C(2;0)$

Trục lớn $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Tiêu cự $2c = 4 \Rightarrow c = 2$

Trục bé $b = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12}$

(E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

ΔABC đều $\Rightarrow$ H là trung điểm AC $\Rightarrow H(1;\sqrt{3})$

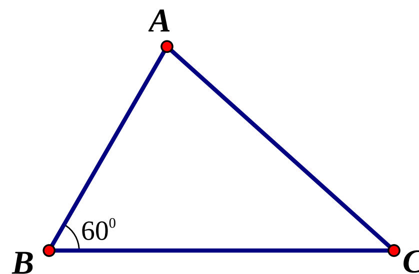
Phương trình BH: $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

Tọa độ M và N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - \sqrt{3}y + 2 = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 = 48 \end{cases}$

Kết quả $M\left(\frac{-8 + 24\sqrt{3}}{13}; \frac{6\sqrt{3} + 24}{13}\right)$; $N\left(\frac{-8 - 24\sqrt{3}}{13}; \frac{6\sqrt{3} - 24}{13}\right)$

Bài 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;0)$, $B(2;0)$, góc giữa hai đường thẳng BC và AB bằng 60^0. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng $y_C > 2$.

Giải



$C(x;y)$ với $y>2$; $\overrightarrow{AB}=(4;0)$,

$\overrightarrow{AC}=(x+2;y)$, $\overrightarrow{BC}=(x-2;y)$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\cos 30^0=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|\\ \cos 30^0=\left|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right)\right|\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{|4(x+2)|}{4\sqrt{(x+2)^2+y^2}}\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{|4(x-2)|}{4\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\end{cases}\begin{cases}3y^2=(x+2)^2\\ y^2=3(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}\\ x=4\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{3}\end{cases}$$

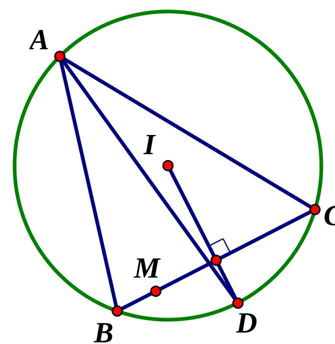
Từ đó suy ra $C\left(4;2\sqrt{3}\right)$

AB thuộc trục Ox $\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C;Ox)=4\sqrt{3}$ đvdt.

Bài 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng d: $x+y=0$, đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có phương trình là $x^2+y^2-4x+2y-20=0$. Biết rằng điểm $M(3;-4)$ thuộc đường thẳng BC và điểm A có hoành độ âm. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.

(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học – Huế, lần 3 – 2014)

Giải



Gọi (T): $x^2+y^2-4x+2y-20=0$

Tọa độ giao điểm của d và (T) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=0\\ x^2+y^2-4x+2y-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\ y=-5\end{cases}$$

Vì A là một giao điểm của d và (T) đồng thời A có hoành độ âm nên $A(-2;2)$. Gọi $I(2;-1)$ là tâm của (T).

Gọi $D(5;-5)$ là giao điểm thứ hai của d và (T). Do AD là phân giác trong góc A nên ta có $DB=DC$. Suy ra ID là đường trung trực của BD. Đường thẳng BC qua $M(3;-4)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{ID}=(3;-4)$ nên có phương trình: $3(x-3)-4(y+4)=0\Leftrightarrow 3x-4y-25=0$

Tọa độ của các điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình:

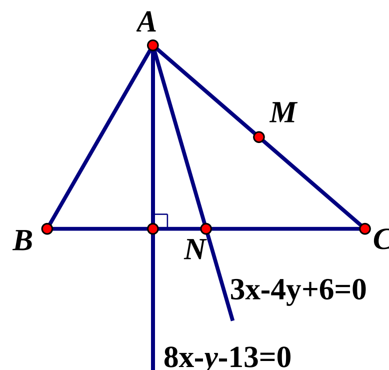
$$\begin{cases}3x-4y-25=0\\ x^2+y^2-4x+2y-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{29}{5}\end{cases}$$

Vậy $B(7;-1)$, $C\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{29}{5}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{29}{5}\right)$, $C(7;-1)$

Bài 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(3;2)$ là trung điểm của cạnh AC, phương trình đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt là $8x-y-13=0$ và $3x-4y+6=0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Giải

Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}8x-y-13=0\\3x-4y+6=0\end{cases}\Rightarrow A(2;3)$



Vì M là trung điểm AC nên $C(2x_M-x_A;2y_M-y_A)$ hay $C(4;1)$

Đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với đường cao kẻ từ A nên có phương trình là $x+8y-12=0$.

Tọa độ trung điểm N của BC là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x+8y-12=0\\3x-4y+6=0\end{cases}\Rightarrow N\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $B(2x_N-x_C;2y_N-y_C)$ hay $B(-4;2)$

Vậy $A(2;3)$, $B(-4;2)$, $C(4;1)$

Bài 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: x-2y-1=0$, $d': x-2y+21=0$ và điểm $A(3;4)$. Hai điểm B, C lần lượt nằm trên đường thẳng d và d′ sao cho tam giác ABC vuông có độ dài cạnh huyền $BC=10$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

Do tam giác ABC vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp tam giác có tâm trùng với trung điểm cạnh BC và bán kính bằng $AI=\frac{1}{2}BC=5$

Gọi tọa độ tâm là $I(x_0;y_0)$, do $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_{d'}}=(1;-2)$ nên d và d′ song song, suy ra I cách đều d và d′.

Hay $\frac{|x_0-2y_0-1|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_0-2y_0+21|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow x_0-2y_0+10=0$

$\Leftrightarrow x_0=2y_0-10$

Khi đó y_0 thỏa mãn $AI=5\Leftrightarrow(2y_0-10-3)^2+(y_0-4)^2=25\Leftrightarrow y_0=4;y_0=8$

Với $y_0=4\Rightarrow I(-2;4)$, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x+2)^2+(y-4)^2=25$

Với $y_0=8\Rightarrow I(6;8)$, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-6)^2+(y-8)^2=25$

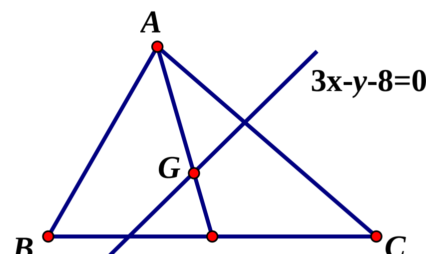
Bài 69. Cho điểm $A(2;-3)$, $B(3;-2)$, ΔABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$; trọng tâm G của ΔABC thuộc đường thẳng (d): $3x-y-8=0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp Δ ABC.

Giải

Gọi $C(a;b)$, $AB: x-y-5=0$

$\Rightarrow d(C;AB)=\frac{|a-b-5|}{\sqrt{2}}=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}$

$\Rightarrow|a-b-5|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a-b=8 & (1)\\a-b=2 & (2)\end{array}\right.$



Trọng tâm $G\left(\frac{a+5}{3};\frac{b-5}{3}\right)\in(d)$

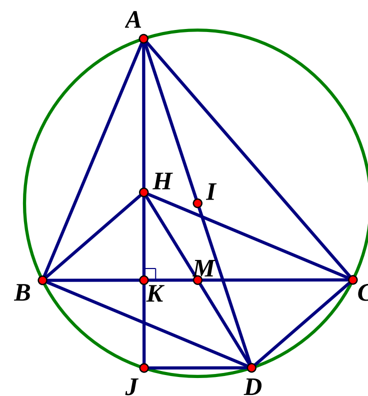
$\Rightarrow 3a-b=4 \quad (3)$

Từ (1), (3) $\Rightarrow C(-2;10)\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{65}+\sqrt{89}}$

Từ (2), (3) $\Rightarrow C(1;-1)\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{3}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$

Bài 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(3;-3)$, chân đường cao kẻ từ A là điểm $K(-1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Giải



Kéo dài $AI\cap(I)$ tại D.

Ta có $ACD=90^0\Rightarrow AC\perp CD$ và H là trực tâm.

$\Rightarrow BH\perp AC\Rightarrow BH//CD$

Chứng minh tương tự ta được $BD//HC\Rightarrow BHCD$ là hình bình hành.

Ta có $BC\cap HD$ tại M là trung điểm mỗi đường (1)

Kéo dài $AK\cap(I)$ tại J

$\Rightarrow AJD=90^0\Rightarrow AJ\perp JD$ (hay $JD\perp AK$) và $AK\perp BC$ (giả thiết)

$\Rightarrow JD//BC$ hay $JD//KM \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM$ là đường trung bình $\Delta HJD\Rightarrow K$ là trung điểm HJ.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_K=\dfrac{x_H+x_J}{2}\\ y_K=\dfrac{y_H+y_J}{2}\end{cases}\Rightarrow J(-1;-1)\Rightarrow IJ=R=\sqrt{(-1-3)^2+(-1+3)^2}=2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow (I):(x-3)^2+(y+3)^2=20$

$\overrightarrow{HK}=(0;-2)$

AH qua $H(-1;3)$ có vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{AH}}=(0;2)$ nên có phương trình $x=-1$.

$A=AH\cap(I)$ nên tọa độ A thỏa hệ: $\begin{cases}(x-3)^2+(y+3)^2=20\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+3)^2=4\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=-5\end{array}\right.\\ x=-1\end{cases}$

$\Rightarrow A(-1;-5),\ J(-1;-1)$

BC qua $K(-1;-1)$ và vuông góc với AJ nên có phương trình $y=1$

$B,C=BC\cap(I)$ nên có tọa độ thỏa hệ:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+3)^2=20\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2=4\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=1\end{array}\right.\\ y=1\end{cases}$$

$\Rightarrow B(1;1),\ C(5;1)$ hoặc $B(5;1),\ C(1;1)$

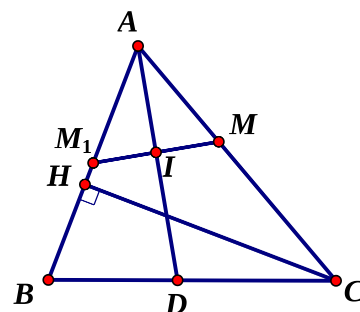
Vậy $A(-1;-5)$, $B(1;1)$, $C(5;1)$ hoặc $A(-1;-5)$, $B(5;1)$, $C(1;1)$

Bài 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có cạnh AC đi qua $M(0;-1)$. Biết $AB = 2AM$, đường phân giác trong $AD: x - y = 0$, đường cao $CH: 2x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh.

Giải

Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua AD $\Rightarrow \vec{n}_{MM_1} = \vec{u}_{AD} = (1;1)$

$\Rightarrow MM_1: 1(x-0) + 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$



Gọi $I = AD \cap MM_1 \Rightarrow$ tọa độ I là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow M_1(-1;0)$

$\vec{n}_{AB} = \vec{u}_{CH} = (-1;2)$

$\Rightarrow AB: -1(x+1) + 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$

Suy ra tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1;-2) \Rightarrow \vec{n}_{AC} = (2;-1) \Rightarrow AC: 2(x-1) - 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

Vì $B \in AB \Rightarrow B\left(x_0; \frac{x_0 + 1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(x_0 - 1; \frac{x_0 - 1}{2}\right); \overrightarrow{AM}(-1;-2) \Rightarrow AB = 2AM \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$

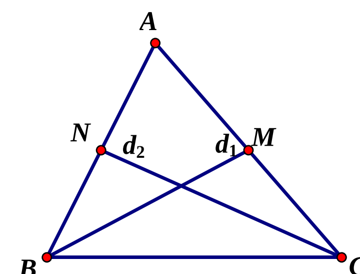
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(5;3) \\ B(-3;-1) \end{array}\right.$

Vì B, C phải khác phía với AD nên $B(5;3)$ không thỏa mãn. Vậy $A(1;1)$, $B(-3;-1)$, $C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

Bài 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(2;2)$ và hai đường trung tuyến của tam giác là $d_1: 2x + 5y - 8 = 0$ và $d_2: x - 3y + 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải

Nhận thấy A không thuộc d_1 và d_2. Giả sử $B \in d_1$, $C \in d_2$. Gọi M, N là trung điểm của AC và AB, khi đó $M \in d_1$, $N \in d_2$ và $M\left(\frac{8 - 5t}{2}; t\right)$, $N(3t' - 2; t')$. Từ đó suy ra $C(6 - 5t; 2t - 2)$, $B(6t' - 6; 2t' - 2)$ và do $B \in d_1$, $C \in d_2$ nên ta có:



$6 - 5t - 3(2t - 2) + 2 = 0$ và

$2(6t' - 6) + 5(2t' - 2) - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{14}{11}$ và $t' = \frac{15}{11}$

Vậy $A(2;2)$, $B\left(\frac{24}{11};\frac{8}{11}\right)$, $C\left(-\frac{4}{11};\frac{6}{11}\right)$. Từ đó phương trình các cạnh của ΔABC là:

$7x+y-16=0$, $8x-13y+10=0$ và

$11x-154y+88=0$.

Bài 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, D là trung điểm của đoạn AB. Biết rằng $I\left(\frac{11}{3};\frac{5}{3}\right)$, $E\left(\frac{13}{3};\frac{5}{3}\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, trọng tâm tam giác ADC, các điểm $M(3;-1)$, $N(-3;0)$ lần lượt thuộc các đường thẳng DC, AB. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết A có tung độ dương.

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $ID\perp AB$ và $EG//AB$ nên $ID\perp GE$, mặt khác $IG\perp DE$ nên I là trực tâm tam giác DEG $\Rightarrow EI\perp DC\Rightarrow$ phương trình DC: $x=3$

Gọi $D(3;a)$. Ta có $\overrightarrow{DI}=\left(\frac{2}{3};\frac{5-3a}{3}\right)$,

$\overrightarrow{DN}=(-6;-a)$

Theo giả thiết suy ra:

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DN}=0\Leftrightarrow -4-a\frac{5-3a}{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Với $a=3$ thì $D(3;3)$ suy ra phương trình AB: $x-2y+3=0$. $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$ là vec-tơ pháp tuyến của AI nên phương trình AI: $x-y-2=0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x-y-2=0\end{cases}\Rightarrow A(7;5)$, suy ra $B(-1;1)$, $C(3;-3)$

Với $a=-\frac{4}{3}\Rightarrow D\left(3;-\frac{4}{3}\right)$

Phương trình AB: $2x+9y+6=0$, $AI:12x+27y-89=0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+9y+6=0 \\ 12x+27y-89=0\end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{107}{6} \\ y=-\frac{125}{27}\end{cases}$ không thỏa mãn.

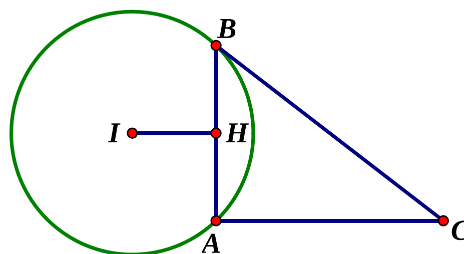
Bài 74. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có hai đỉnh A, B thuộc đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính bằng 5. Biết đường thẳng đi qua hai đỉnh A, B có hệ số góc dương và đi qua điểm $M(0;5)$, cạnh AC có độ dài bằng $\sqrt{5}$, diện tích của tam giác ABC bằng 5 và tung độ của A dương. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.

Giải

Đường tròn tâm I có phương trình $(x+2)^2+(y+1)^2=25$,

AB có phương trình $y=ax+5$ $(a>0)$

$S_{\Delta ABC}=5\Rightarrow AB=2\sqrt{5}\Rightarrow AH=\sqrt{5}$



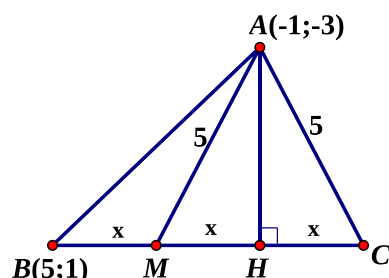
$\Rightarrow d(I,AB)=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \dfrac{|-2a+6|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2\\ a=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vì $a>0$ nên $a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ đt AB có phương trình là $y=\dfrac{1}{2}x+5$. Khi đó tọa độ A, B thỏa mãn

$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+5\\ (x+2)^2+(y+1)^2=25\end{cases}\Rightarrow A(-2;4),\ B(-6;2)$ hoặc $A(-6;2),\ B(-2;4)$

Bài 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;-3)$, $B(5;1)$. Điểm M nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MC=2MB$. Tìm tọa độ điểm C biết rằng $MA=AC=5$ và đường thẳng BC có hệ số góc là một số nguyên.

Giải



Gọi H là trung điểm MC. Khi đó $AH\perp BC$ và $BM=MH=HC=x$.
Áp dụng định lý Pitago trong các tam giác vuông ABH, AMH ta có:

$\begin{cases} AH^2+(2x)^2=AB^2=52\\ AH^2+x^2=AM^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} AH=4\\ x=3\end{cases}$

Gọi phương trình đường thẳng BC là: $a(x-5)+b(y-1)=0\quad (a^2+b^2\neq 0)$

Ta có $d(A;BC)=4\Leftrightarrow \dfrac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4\Leftrightarrow a(5a+12b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=0\\ 5a+12b=0\end{array}\right.$

Với $a=0$, đường thẳng BC có hệ số góc $k=0$ (thỏa mãn). Khi đó $BC: y=1$.

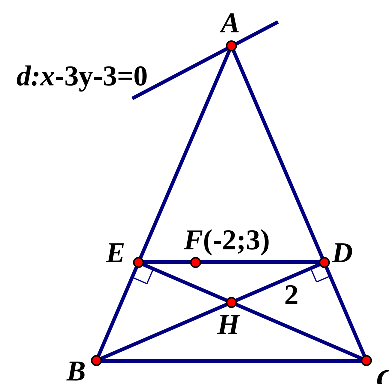
Với $5a+12b=0$, đường thẳng BC có hệ số góc $k=\dfrac{12}{5}$ (không thỏa mãn)

Ta có $(A;R=5):(x+1)^2+(y+3)^2=25$. Khi đó tọa độ của C và M là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} y=1\\ (x+1)^2+(y+3)^2=25\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} C(2;1),\ M(-4;1)\\ C(-4;1),\ M(2;1)\end{array}\right.$

Vì M nằm trên đoạn thẳng BC nên $C(-4;1)$.

Bài 76. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, có trực tâm $H(-3;2)$. Gọi D, E là chân đường cao kẻ từ B và C. Biết rằng điểm A thuộc đường thẳng $d: x-3y-3=0$, điểm $F(-2;3)$ thuộc đường thẳng DE và $HD=2$.
Tìm tọa độ điểm A.



Giải

Ta có $HD=2\Leftrightarrow (x_D+3)^2+(y_D-2)^2=4$

$\Leftrightarrow x_D^2+y_D^2+6x_D-4y_D+9=0\qquad (1)$

Vì $A\in d\Rightarrow A(3m+3;m)$. Ta có:

$AD\perp HD\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}=0$

$\Leftrightarrow \left(x_D - (3m+3)\right).(x_D+3) + (y_D - m).(y_D - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x_D^2 + y_D^2 - 3mx_D - (m+2)y_D - 7m - 9 = 0 \quad (2)$ lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được
$(6+3m)x_D + (m-2)y_D + 7m + 18 = 0 \quad (3)$

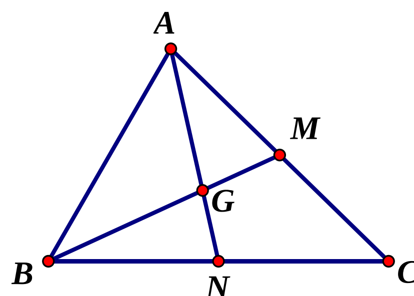
Hoàn toàn tương tự ta có $(6+3m)x_E + (m-2)y_E + 7m + 18 = 0 \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra đường thẳng DE có phương trình $(6+3m)x + (m-2)y + 7m + 18 = 0$.

Vì $F(-2;3) \in DE \Rightarrow m = 0$. Do đó $A(3;0)$

Bài 77. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với hai trung tuyến $AN: x+y-2=0, BM: 7x+y-6=0$, đỉnh $B(1;-1)$. Biết tam giác ABC có diện tích bằng 2. Xác định tọa độ các đỉnh A, C của tam giác.

Giải



Ta có trọng tâm $G = AN \cap BM \Rightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

Vì $N \in AN \Rightarrow N(n;2-n) \Rightarrow C(2n-1;5-2n)$ (vì N là trung điểm của BC)

Ta có: $S_{\Delta SCB} = \frac{1}{2}d(C;BM).CG$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d(C;BM).CG$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{\Delta GBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$

Từ đó ta có: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}d(C;BM).\frac{5\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow d(C;BM) = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow \frac{|12n-8|}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow |12n-8| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

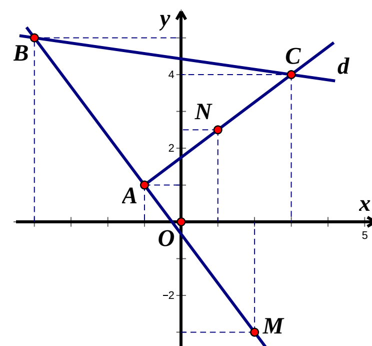
Khi đó ta có tọa độ G, B, C nên:

Với $C(1;3)$ thì $A(0;2)$

Với $C\left(-\frac{1}{3};\frac{13}{3}\right)$ thì $A\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$

Bài 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng $d: x+7y-31=0$, điểm $N\left(1;\frac{5}{2}\right)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc đường thẳng AB. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải



MB: $a(x-2) + b(y+3) = 0 \quad (a^2+b^2>0)$

Vì $MBC = 45^0$

$\Rightarrow \cos 45^0 = \frac{|a+7b|}{\sqrt{1^2+7^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow 12a^2 - 7ab - 12b^2 = 0 \left[\begin{array}{l} 3a=4b \\ 4a=-3b\end{array}\right.$

TH1: $3a = 4b$. Chọn $a=4, b=3$

$\Rightarrow d: 4x+3y+1=0$

TH2: $4a = -3b$, chọn $a = 3, b = -4$

$\Rightarrow d: 3x - 4y - 18 = 0$

Nếu chọn AB là d $\Rightarrow \begin{cases} AC \perp d \\ N \in AC \end{cases} \Rightarrow AC: 3x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow A(-1;1) \Rightarrow B(-4;5)$

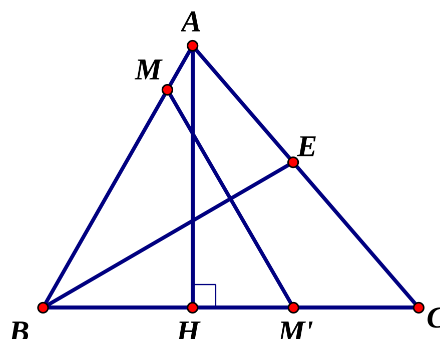
Mặt khác $\overrightarrow{MA} = (-3;4), \overrightarrow{MB} = (-6;8) \Rightarrow 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow M$ nằm ngoài đoạn AB $\Rightarrow$ trường hợp này thỏa mãn. Từ đó suy ra $C(3;4)$

Hoàn toàn tương tự, nếu lấy AB là d: $3x - 4y - 18 = 0$ (loại).

Bài 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với đường cao AH có phương trình: $3x + 4y + 10 = 0$ và đường phân giác trong BE có phương trình: $x - y + 1 = 0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và cách đỉnh C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tính diện tích tam giác ABC.

(Trích Lê Bá Trần Phương, số 3 – 2013)

Giải



Gọi M′ là điểm đối xứng với M qua phân giác BE thì M′ thuộc đường thẳng BC.

Tính được điểm $M'(1;1)$. Đường thẳng BC đi qua M′ và vuông góc với AH nên có phương trình $4x - 3y - 1 = 0$.

Điểm B là giao điểm của BC và BE nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4;5)$

Đường thẳng AB đi qua B và M nên có phương trình: $3x - 4y + 8 = 0$.

Điểm A là giao điểm của AB và AH nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-3; -\frac{1}{4}\right)$

Điểm C thuộc BC và $MC = \sqrt{2}$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{2} \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \Rightarrow C(1;1) \\ x = \frac{31}{25}; y = \frac{33}{25} \Rightarrow C\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right) \end{array} \right.$$

Kiểm tra lại: thay tọa độ điểm A, $C(1;1)$ vào phương trình đường phân giác BE ta được hai giá trị trái dấu nên B và $C(1;1)$ khác phía đối với BE, do đó BE là phân giác trong của tam giác ABC (thỏa mãn)

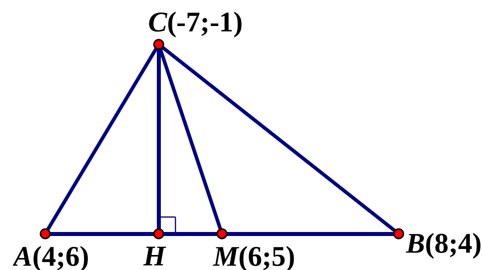
Thay tọa độ điểm A và $C\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right)$ thì A, C cùng phía nên loại.

Tính được $BC = 5$ và $AH = d(A;BC) = \frac{49}{20} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{49}{8}$ (đvdt)

Bài 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;6)$, phương trình các đường thẳng chứa đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh C lần lượt là $2x - y + 13 = 0$ và $6x - 13y + 29 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

Gọi đường cao và trung tuyến kẻ từ C là CH và CM. Khi đó CH có phương trình $2x-y+13=0$, CM có phương trình $6x-13y+29=0$.



Từ hệ $\begin{cases}2x-y+13=0\\6x-13y+29=0\end{cases}\Rightarrow C(-7;-1)$

$AB\perp CH\Rightarrow \vec{n}_{AB}=\vec{u}_{CB}=(1;2)$

$\Rightarrow$ phương trình AB: $x+2y-16=0$

Từ hệ $\begin{cases}x+2y-16=0\\6x-13y+29=0\end{cases}\Rightarrow M(6;5)$

$\Rightarrow B(8;4)$

Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC: x^2+y^2+mx+ny+p=0$

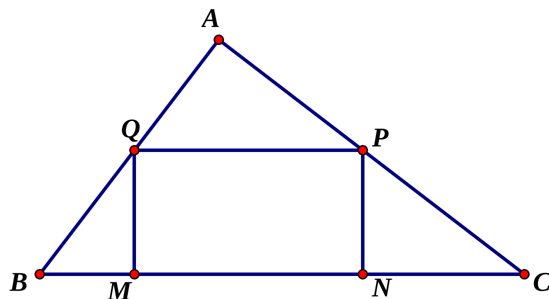
Vì A, B, C thuộc đường tròn nên $\begin{cases}52+4m+6n+p=0\\80+8m+4n+p=0\\50-7m-n+p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-4\\n=6\\p=-72\end{cases}$

Suy ra phương trình đường tròn: $x^2+y^2-4x+6y-72=0$ hay $(x-2)^2+(y+3)^2=85$.

Bài 81. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp hình chữ nhật MNPQ. Biết các điểm $M(-3;-1)$ và $N(2;-1)$ thuộc cạnh BC, Q thuộc cạnh AB, P thuộc cạnh AC, đường thẳng AB có phương trình: $x-y+5=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

Phương trình đường thẳng d vuông góc BC qua $M(-3;-1)$ là $x+3=0$ suy ra tọa độ Q là $Q(-3;2)$.



Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\Rightarrow P(2;2)$

Đường thẳng AC qua $P(2;2)$ nhận $\vec{n}=(1;1)$ làm vec-tơ pháp tuyến nên có phương trình $x+y-4=0$.

Vậy $A\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$, $B(-6;-1)$, $C(5;-1)$

Bài 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Biết $D(3;1)$, đường thẳng $EF: y-3=0$. Tìm tọa độ điểm A biết $y_A>0$.

Giải

Phương trình đường thẳng BC: $y=1$

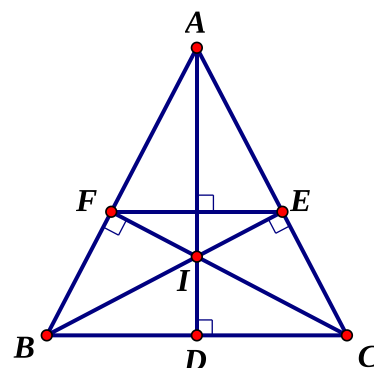
Nhận xét: $EF//BC$ mà ΔAEF cân tại A (theo tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Do $AD\perp BC$ phương trình đường cao AD là $x=3$.

Do $F\in EF: y=3\Rightarrow F(t;3)$

Theo tính chất tiếp tuyến $BD=BF\Leftrightarrow BF^2=BD^2$



$\Leftrightarrow\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4=\left(3-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-1\end{array}\right.$

Với $t=2\Rightarrow F(2;3)$. Với $t=-1\Rightarrow F(-1;3)$

Phương trình đường thẳng (qua B và F)

TH1: $F(2;3)\Rightarrow\overrightarrow{BF}=\left(\frac{3}{2};2\right)$

$\Rightarrow AB:2(x-2)-\frac{3}{2}(y-3)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0\Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=3\\2x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=\frac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow A\left(3;\frac{13}{3}\right)$

TH2: $F(-1;3)\Rightarrow\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{3}{2};2\right)\Rightarrow AB:2(x+1)+\frac{3}{2}(y-3)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}=0$

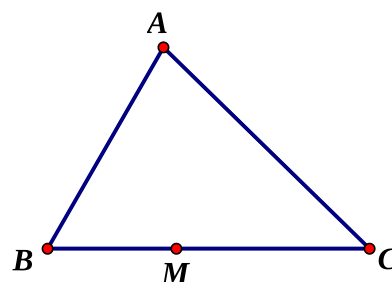
$\Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=3\\2x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-\frac{7}{3}\end{cases}$ (loại do $y_A>0$)

Vậy $A\left(3;\frac{13}{3}\right)$

Bài 83. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình $AB:2x+y-1=0$, phương trình $AC:3x+4y+6=0$ và điểm $M(1;-3)$ nằm trên đường thẳng BC thỏa mãn $3MB=2MC$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

(Trích Trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ – 2013)

Giải



Từ giả thiết ta có $A(2;-3)$, $B(b;1-2b)$ và $C\left(-\frac{4c}{3}-2;c\right)$

Do M, B, C thẳng hàng và $3MB=2MC$ nên có 2 trường hợp:

TH1: $3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=3x_B-2x_C\\y_M=3y_B-2y_C\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}9b+8c=-9\\6b+2c=6\end{cases}\Leftrightarrow b=\frac{11}{5};\ c=-\frac{18}{5}$

Suy ra $B\left(\frac{11}{5};-\frac{17}{5}\right)$, $C\left(\frac{14}{5};-\frac{18}{5}\right)$

TH2: $3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{3x_B+2x_C}{5}\\y_M=\frac{3y_B+2y_C}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9b-8c=27\\-6b+2c=-18\end{cases}\Leftrightarrow b=3;\ c=0$

Suy ra $B(3;-5)$, $C(-2;0)$

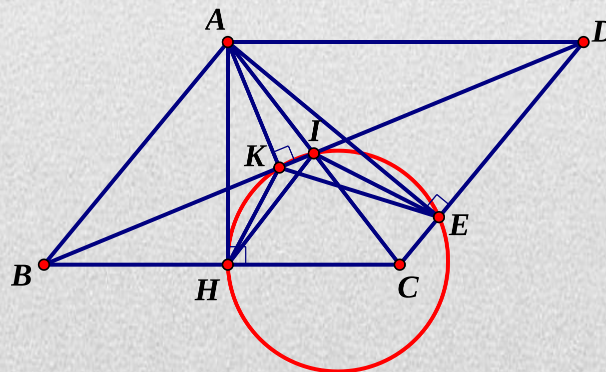
Từ đó TH1 cho ta $G\left(\frac{7}{3};-\frac{10}{3}\right)$ và TH2 cho ta $G\left(1;-\frac{8}{3}\right)$

TRẦN ĐÌNH CƯ
GV chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

Cưa Đổ Oxy

Chủ đề 2: Hình bình hành và hình thoi

Tài liệu thân tặng các em học sinh 12, Chuẩn bị kỳ thi THPT Quốc Gia 2016. Chúc các em đạt kết quả cao trong các kỳ thi sắp đến.



Huế, Ngày 17/05/ 2016

CHỦ ĐỀ 2. HÌNH BÌNH HÀNH – HÌNH THOI

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0), B(0;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Giải

Đường thẳng AB có phương trình: $2x + y - 2 = 0$

Vì I nằm trên đường thẳng $y = x$ nên giả sử $I(t;t)$.

Suy ra $C(2t-1;2t), D(2t;2t-2)$

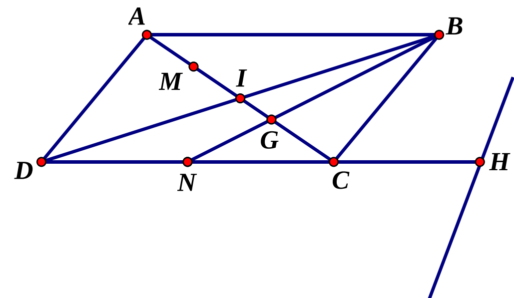
Mặt khác $S_{ABCD} = AB.d(C;AB) = 4 \Rightarrow d(C;AB) = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |3t-2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{array}\right.$

Vậy $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0), D(0;-2)$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có N là trung điểm của cạnh CD và đường thẳng BN có phương trình là $13x - 10y + 13 = 0$, điểm $M(-1;2)$ thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC = 4AM$. Gọi H là điểm đối xứng với N qua C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng $3AC = 2AB$ và điểm H thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - 3y = 0$.

Giải

$d(M;BN) = \frac{|13(-1) - 10.2 + 13|}{\sqrt{13^2 + 10^2}} = \frac{20}{\sqrt{269}}$ $H \in \Delta \Leftrightarrow H(3a;2a)$



Gọi I là tâm ABCD, G là giao điểm của AC và BN. Ta thấy G là trọng tâm ΔBCD.

Suy ra $CG = \frac{2}{3}CI = \frac{1}{3}AC$ mà

$AM = \frac{1}{4}AC \Rightarrow MG = \frac{5}{12}AC \Rightarrow CG = \frac{4}{5}MG$

$\Rightarrow d(C;BN) = \frac{4}{5}d(M;BN) = \frac{16}{\sqrt{269}} \Rightarrow d(H;BN) = 2d(C;BN) = \frac{32}{\sqrt{269}}$

$\Leftrightarrow \frac{|13.3a - 10.2a + 13|}{\sqrt{269}} = \frac{32}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\frac{45}{19} \end{array}\right.$

Vì H và M nằm khác phía đối với đường thẳng BN nên $H(3;2)$.

Ta thấy $CM = \frac{3AC}{4} = \frac{2AB}{4} = \frac{2CD}{4} = \frac{CD}{2} = CN = CH \Rightarrow \Delta MHN$ vuông tại M.

MH có pt $y - 2 = 0 \Rightarrow MN: x + 1 = 0 \Rightarrow N(-1;0) \Rightarrow C(1;1), D(-3;-1)$

Do $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MA} \Rightarrow A\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right) \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$

Vậy $A\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right), B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right), C(1;1), D(-3;-1)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(-1;-3)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y+3=0, d_2: x-5y-16=0$. Tìm tọa độ các điểm C, D lần lượt trên d_1 và d_2 sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải

Giả sử $C(c;-c-3)\in d_1, D(5d+16;d)\in d_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD}=(5d+16-c;d+c+3)$

ABCD là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=(3;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases}5d+16-c=3\\ d+c+3=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5d-c=-13\\ d+c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=-2\\ c=3\end{cases} \Rightarrow C(3;-6), D(6;-2)$$

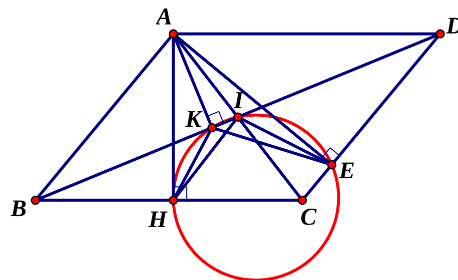
Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;4), \overrightarrow{BC}=(4;-3)$ không cùng phương $\Rightarrow$ A, B, C, D không thẳng hàng $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Vậy $C(3;-6), D(6;-2)$.

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có góc ABC nhọn, đỉnh $A(-2;-1)$. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD, CD. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác HKE là $(C): x^2+y^2+x+4y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết H có hoành độ âm, C có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$.

Giải

Ta có $AHC=AEC=90^0$ nên bốn điểm A, H, C, E cùng thuộc đường tròn đường kính AC.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $HIE=2HAE=2(180^0-BCD)$

Các tứ giác AKED, AKHB nội tiếp nên $EKD=EAD$ và $BKH=BAH$.

Do đó:

$HKE=180^0-EKD-BKH=180^0-EAD-BAH=2HAE=2(180^0-BCD)=HIE$ Gọi

$C(c;c-3)\in d, (c>0)\Rightarrow I\left(\frac{c-2}{2};\frac{c-4}{2}\right)$, do I thuộc (C) nên có phương trình:

$c^2-c-2=0\Leftrightarrow c=2\vee c=-1$ (loại $c=-1$). Suy ra $C(2;-1)$ và $I(0;-1)$.

Điểm E, H nằm trên đường tròn đường kính AC và đường tròn (C) nên tọa độ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+x+4y+3=0\\ x^2+(y+1)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0, y=-3\\ x=-\frac{8}{5}; y=-\frac{11}{5}\end{array}\right.$

Vì H có hoành độ âm nên $H\left(-\frac{8}{5};-\frac{11}{5}\right), E(0;-3)$. Suy ra $AB: x-y+1=0$, $BC: x-3y-5=0$.

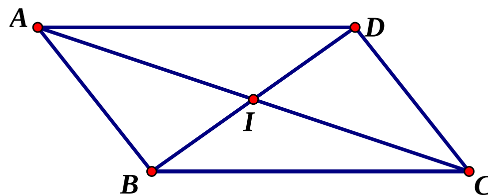
Tọa độ B thỏa mãn $\begin{cases}x-y+1=0\\ x-3y-5=0\end{cases}\Rightarrow B(-4;-3)\Rightarrow \overrightarrow{BA}=(2;2), \overrightarrow{BC}=(6;2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=16>0$ (thỏa mãn)

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow D(4;1)$. Vậy $B(-4;-3), C(2;-1), D(4;1)$

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành ABCD có $A(-1;3)$, điểm C thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-6=0$, phương trình đường thẳng BD: $x-2y+2=0$, $\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$. Tìm tọa độ ba đỉnh B, C, D.

Giải



Gọi I là trung điểm của AC, suy ra I thuộc BD nên $I(2y-2;y)$, khi đó $C(4y-3;2y-3)$. Do C thuộc Δ nên $x_C+y_C-6=0 \Leftrightarrow 6y-12=0 \Leftrightarrow y=2$, suy ra $I(2;2)$, $C(5;1)$

Ta có $\overrightarrow{AC}=(6;-2)$ và B thuộc BD nên $B(2b-2;b)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2b-1;b-3)$.

Do đó $\cos\angle BAC=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}.\sqrt{b^2-2b+2}}$

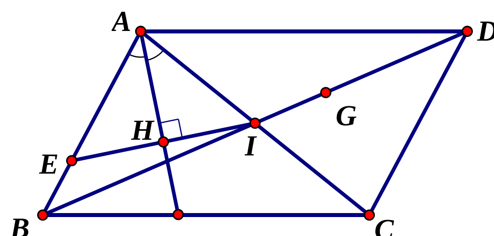
Do $\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$ nên $\cos\angle BAC=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Suy ra:

$$\frac{b}{\sqrt{2}.\sqrt{b^2-2b+2}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge 0 \\ 3b^2-16b+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Khi đó ta được $B_1(6;4)$, $D_1(-2;0)$ và $B_2\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$, $D_2\left(\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có tâm $I(2;-5)$ và đường phân giác của góc BAC có phương trình $2x+y-4=0$. Biết tam giác ACD có trọng tâm $G\left(-\frac{1}{3};-\frac{14}{3}\right)$, tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD.

Giải



$\overrightarrow{GI}=\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{GI} \Rightarrow D(-5;-4)$

I là trung điểm $BD \Rightarrow B(9;-6)$

Một vec-tơ chỉ phương của đường phân giác góc BAC là $\vec{u}=(1;-2)$

$H(t;4-2t)$ là hình chiếu của I lên đường phân giác góc $BAC \Rightarrow H(4;-4)$

Gọi E là điểm đối xứng của I qua đường phân giác góc $BAC \Rightarrow E(6;-3)\in AB$

Phương trình cạnh $AB: x+y-3=0 \Rightarrow A(1;2)$

I là trung điểm của $AC \Rightarrow C(3;-12)$

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0)$, $B(0;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ đỉnh C và D.

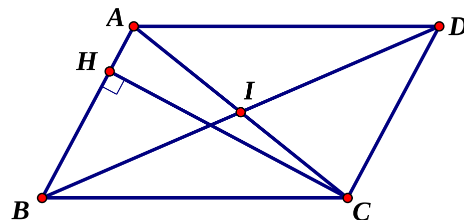
Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2) \Rightarrow AB=\sqrt{5}$. Phương trình của AB là: $2x+y-2=0$

$I\in(d): y=x \Rightarrow I(t;t)$. I là trung điểm của AC và BD nên ta có: $C(2t-1;2t)$, $D(2t;2t-2)$

Mặt khác $S_{ABCD} = AB.CH = 4$ (CH là chiều cao) $\Rightarrow CH = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Ngoài ra



$d(C;AB) = CH \Leftrightarrow \frac{|6t-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right) \\ t = 0 \Rightarrow C(-1;0), D(0;-2) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ của C và D là $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$, $D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0)$, $D(0;-2)$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 12, hai đỉnh $A(-1;3)$, $B(-2;4)$. Tìm tọa độ hai đỉnh còn lại, biết giao điểm hai đường chéo nằm trên trục hoành.

Giải

I là giao điểm của AC và BC. I thuộc Ox nên $I(a;0)$.

Phương trình AB: $x + y - 2 = 0$

$d(I;AB) = \frac{|a-2|}{\sqrt{2}}$; $AB = \sqrt{2}$

Vì $S_{ABCD} = 12 \Rightarrow 2d(I;AB).AB = 12$

$\Leftrightarrow |a-2| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4 \\ a = 8 \end{array}\right.$

$a = -4$ suy ra $I(-4;0)$ nên $C(-7;-3)$ và $D(-6;-4)$

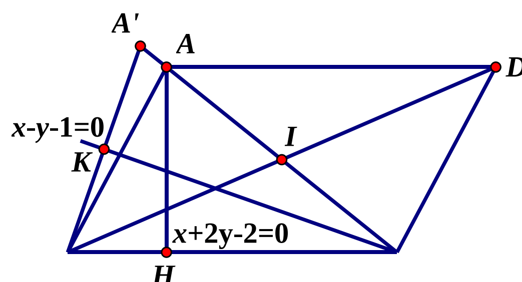
$a = 8$ suy ra $I(8;0)$ nên $C(17;-3)$ và $D(18;-4)$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $B(1;5)$ và đường cao AH có phương trình $x + 2y - 2 = 0$, với H thuộc BC; đường phân giác trong của góc ACB có phương trình là $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C, D.

Giải

BC đi qua $B(1;5)$ và vuông góc AH nên BC có phương trình: $-2x + y - 3 = 0$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} -2x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-5)$



Gọi A′ là điểm đối xứng B qua đường phân giác $x - y - 1 = 0$ (d), $BA \cap (d) = K$

Đường thẳng KB đi qua B và vuông góc d nên KB có phương trình: $x + y - 6 = 0$

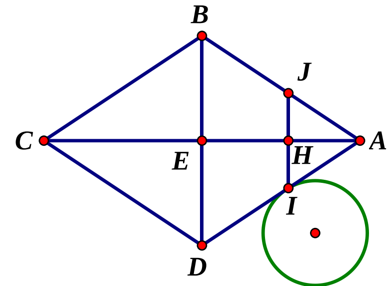
Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$. Suy ra $A(6;0)$.

Trung điểm I của AC có tọa độ là $I(0;-3)$ đồng thời I là trung điểm BD nên $D(-1;-11)$.

HÌNH THOI

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có diện tích bằng 40, đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn $(S):(x-4)^2+(y-1)^2=2$, điểm $J\left(\frac{19}{5};\frac{18}{5}\right)$ nằm trên đường thẳng AB, đường thẳng AC có phương trình $x-3y+1=0$. Tìm tọa độ các điểm A, D biết D có hoành độ nhỏ hơn 5.

Giải



Gọi I là điểm đối xứng với J qua đt AC thì $I\in AD$. Giả sử $I(a;b)$ thì trung điểm của IJ là $H\left(\frac{a+\frac{19}{5}}{2};\frac{b+\frac{18}{5}}{2}\right)$. I, J đối xứng với nhau qua AC

$\Leftrightarrow\begin{cases}H\in AC\\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u_{AC}}=0\end{cases}\Leftrightarrow a=5,\ b=0$.

Vậy $I(5;0)$.

Ta có $I(5;0)\in(S)$ nên đt AD chính là tiếp tuyến của (S) tại I. Pt AD: $x-y-5=0$

$\Rightarrow A(8;3)$.

Gọi E là tâm của hình thoi và $\varphi=\angle EAD\Rightarrow\varphi$ là góc giữa AC và AD

$\Rightarrow\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\cot\varphi=2\Rightarrow S_{ABCD}=40\Leftrightarrow DE.EA=20$

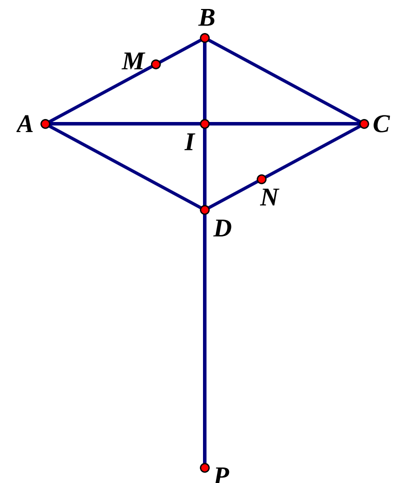
$\Leftrightarrow DE.DE.\cot\varphi=20\Leftrightarrow DE^2=10$

Giả sử $D(x_0;x_0-5)$; $DE^2=10\Leftrightarrow d^2(D;AC)=10\Leftrightarrow\left(\frac{|x_0-3(x_0-5)+1|}{\sqrt{10}}\right)^2=10$

$\Leftrightarrow(16-2x_0)^2=100\Leftrightarrow x_0=3<5;\ x_0=13>5$ (loại). Vậy $D(3;-2)$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm $I(2;1)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ điểm P biết rằng $\overrightarrow{BP}=5\overrightarrow{BI}$ và điểm B có tung độ dương.

Giải



Phương trình đường thẳng AB qua M có dạng $ax+b\left(y-\frac{1}{3}\right)=0$ $(a^2+b^2>0)$, suy ra phương trình đường thẳng CD qua N và song song với AB là $ax+b(y-7)=0$.

Do AB và CD đối xứng nhau qua tâm I, nên

$\begin{cases}d(I;AB)=d(I;CD)\\ \text{I nằm giữa hai đường thẳng AB và CD}\end{cases}$

$\Rightarrow 3a=4b$

Chọn $a=4$ và $b=3$ ta được pt $AB:4x+3y-1=0$

Pt đường thẳng BD qua I có dạng:

$m(x-2)+n(y-1)=0$ $(m^2+n^2>0)$

Ta có $\cos(AB,BD)=\frac{|4m+3n|}{5\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

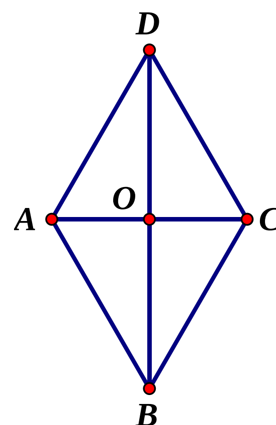
$\Leftrightarrow m=-2n$ hoặc $m=-\frac{2}{11}n$

Chọn $m=2$ và $n=-1$ hoặc $m=2$ và $n=-11$ ta được pt BD: $2x-y-3=0$ hoặc $2x-11y+7=0$. Do B có tung độ dương và $B=AB\cap BD$ nên $B\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Từ $\overrightarrow{BP}=5\overrightarrow{BI}\Rightarrow P\left(\frac{54}{5};\frac{13}{5}\right)$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình cạnh BD là $x-y=0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $P\left(1;\sqrt{3}\right)$, đường thẳng CD đi qua $Q\left(-2;-2\sqrt{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết độ dài $AB=AC$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 1.

Giải



Giả sử phương trình của AB: $a\left(x-1\right)+b\left(y-\sqrt{3}\right)=0,\left(a^2+b^2\neq 0\right)$

Từ giả thiết $\cos\left(AB,BD\right)=\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a^2+4ab+b^2=0$

Chọn $b=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2+\sqrt{3}\\a=-2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

TH1: $a=-2-\sqrt{3}, b=1\Rightarrow$ pt AB:

$\left(-2-\sqrt{3}\right)\left(x-1\right)+y-\sqrt{3}=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\left(-2-\sqrt{3}\right)\left(x-1\right)+y-\sqrt{3}=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-2}{1+\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}\\y=\frac{-2}{1+\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}\end{cases}\text{ (loại)}$$

TH2: $a=-2+\sqrt{3}, b=1\Rightarrow$pt AB: $\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(x-1\right)+y-\sqrt{3}=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(x-1\right)+y-\sqrt{3}=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ Vậy $B\left(2;2\right)$

$\overrightarrow{PB}\left(1;2-\sqrt{3}\right)$. Phương trình CD: $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(x+2\right)-\left(y+2\sqrt{3}\right)=0$

Tọa độ D là nghiệm của hệ $\begin{cases}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(x+2\right)-\left(y+2\sqrt{3}\right)=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-4\end{cases}$ Vậy $D\left(-4;-4\right)$

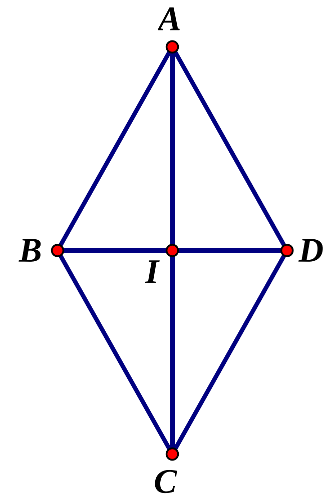
$O\left(-1;-1\right)$. Pt AC: $x+y+2=0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y+2=0\\\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(x-1\right)+y-\sqrt{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}-1\end{cases}$

Vậy $A\left(-1-\sqrt{3};\sqrt{3}-1\right)$. Khi đó $C\left(\sqrt{3}-1;-1-\sqrt{3}\right)$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có diện tích $S=20$, một đường chéo có phương trình $\left(d\right):2x+y-4=0$ và $D\left(1;-3\right)$. Tìm các đỉnh còn lại của hình thoi biết điểm A có tung độ âm.

Giải



Dễ thấy $D \notin (d)$, suy ra đường thẳng $(d): 2x + y - 4 = 0$ là phương trình của đường chéo AC. Vì ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD$, và $D \in BD$ suy ra phương trình của BD là: $x - 2y - 7 = 0$

Gọi $I = AC \cap BD$, tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2)$$

Mặt khác I là trung điểm của BD, suy ra $B(5;-1) \Rightarrow IB = \sqrt{5}$

Vì $AC \perp BD$ nên $S = 2IA.IB$ mà $S = 20 \Rightarrow IA = 2\sqrt{5}$

Lại có $A \in (d) \Rightarrow A(x; 4 - 2x)$. Có: $IA = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow IA^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x-3)^2 = 20$

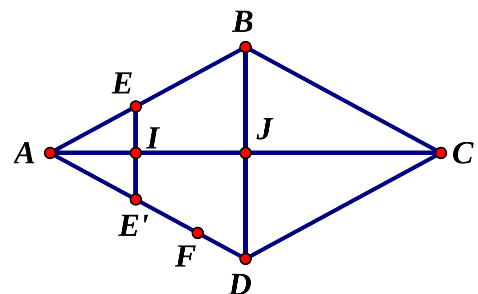
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow A(1;2) \\ x = 5 \Rightarrow A(5;-6) \end{array}\right.$$

Theo giả thiết suy ra $A(5;-6)$ thỏa mãn. Vì C đối xứng với A qua I nên $C(1;2)$

Vậy $A(5;-6), B(5;-1), C(1;2)$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có đường chéo AC nằm trên đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AD, $AC = 2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD biết điểm C có hoành độ âm.

Giải



Gọi E' là điểm đối xứng với E qua AC, do AC là phân giác của góc BAD nên E' thuộc AD. EE' vuông góc với AC và qua điểm $E(9;4)$ nên có phương trình $x - y - 5 = 0$

Gọi I là giao của AC và EE', tọa độ I là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(3;2)$$

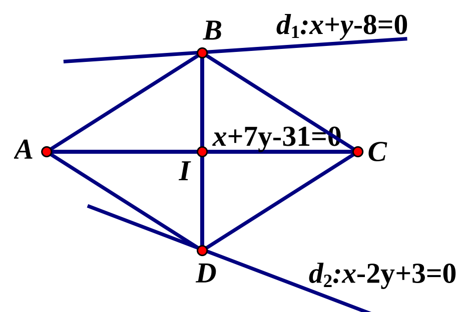
Vì I là trung điểm của EE' nên $E'(-3;-8)$

Đường thẳng AD qua $E'(-3;-8)$ và $F(-2;-5)$ có VTCP là $\overrightarrow{E'F} = (1;3)$ nên phương trình là: $3(x+3) - (y+8) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 1 = 0$

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD. Các đỉnh B và D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y - 8 = 0$ và $d_2: x - 2y + 3 = 0$. Đường thẳng AC có phương trình là $x + 7y - 31 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD biết diện tích hình thoi ABCD bằng 75 và điểm A có hoành độ âm.

(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học – Huế lần 1 – 2014)

Giải



$B \in d_1 \Leftrightarrow B(b; 8 - b)$ và $D \in d_2 \Leftrightarrow D(2d - 3; d)$.

Suy ra $\overrightarrow{BD} = (-b + 2d - 3; d + b - 8)$

I là trung điểm của BD nên $I\left(\dfrac{b + 2d - 3}{2}; \dfrac{d - b + 8}{2}\right)$

Theo tính chất hình thoi: $\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b - 13d + 13 = 0 \\ 2b - 3d + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy $B(0;8)$, $D(-1;1)$, $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$

Ta có $IA=\frac{AC}{2}=\frac{15}{\sqrt{2}}$

Ta có $IA=\frac{15}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left(-7a+\frac{63}{2}\right)^2+\left(a-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2\Leftrightarrow a=3$ hoặc $a=6$

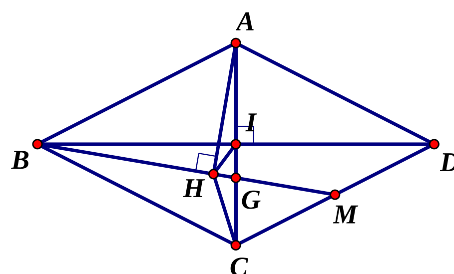
Suy ra $A(10;3)$ hoặc $A(-11;6)$. Do $x_A<0$ nên $A(-11;6)$. Từ đó $C(10;3)$.

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có $BD=2AC$, điểm $H(2;-1)$, phương trình của đường thẳng BD là $x-y=0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Giả sử H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng BM. Viết phương trình của đường thẳng AH.

(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học – Huế lần 2 – 2014)

Giải

Gọi I là tâm hình thoi và G là giao điểm của BM với AC thì G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong tam giác vuông BIG, ta có:



$$\sin IBG=\frac{IG}{BG}=\frac{IG}{\sqrt{BI^2+IG^2}}=\frac{IG}{\sqrt{(6IG)^2+IG^2}}$$

Suy ra $\cos(BD,AH)=\sin IBG=\frac{1}{\sqrt{37}}$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2>0$ là vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng AH.

Ta có $\cos(BD,AH)=\frac{1}{\sqrt{37}}\Leftrightarrow\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{37}}\Leftrightarrow 35a^2-74ab+35b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{7b}{5}\\ a=\frac{5b}{7}\end{array}\right.$

Với $a=\frac{7b}{5}$, chọn $a=7, b=5$ ta được AH: $7(x-2)+5(y+1)=0\Leftrightarrow 7x+5y-9=0$

Với $a=\frac{5b}{7}$, chọn $a=5, b=7$ ta được AH: $5(x-2)+7(y+1)=0\Leftrightarrow 5x+7y-3=0$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD có $A=60^0$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $MB+NB=AB$. Biết $P(\sqrt{3};1)$ thuộc đường thẳng DN và đường phân giác trong của góc MDN có phương trình là $d: x-y\sqrt{3}+6=0$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình thoi ABCD.

Giải

Từ giả thiết $A=60^0\Rightarrow$ tam giác ABD, CBD là các tam giác đều. Theo đề bài ta có $AM=BN, BM=CN$. Xét hai tam giác ADM và BDN ta có:

$DAM=DBN=60^0$, $AD=BD, AM=BN\Rightarrow$ hai tam giác bằng nhau.

$\Rightarrow ADM=BDN$ (1)

Xét hai tam giác BMD và CND ta có: $DBM=DCN=60^0$, $CD=BD$, $CN=BM\Rightarrow$ hai tam giác bằng nhau

$\Rightarrow NDC=MDB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MDN=60^0$.

Gọi P’ là điểm đối xứng của P qua đường phân giác d $\Rightarrow P'$ thuộc đường thẳng DM.

$\Rightarrow$ tam giác PDP’ là tam giác đều $\Rightarrow DP=PP'=2d(P,d)=6$

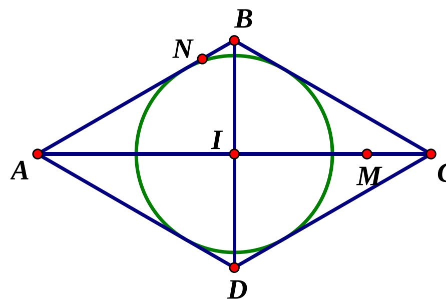
Gọi D có tọa độ $D\left(a;\frac{a+6}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow PD^2=\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a+6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2=36$

$\Rightarrow a=3+\sqrt{3},\ a=-6+\sqrt{3}\Rightarrow D\left(3+\sqrt{3};1+3\sqrt{3}\right),\ D\left(-6+\sqrt{3};1\right)$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $(I):(x-5)^2+(y-6)^2=\frac{32}{5}$. Biết rằng các đường thẳng AC và AB lần lượt đi qua các điểm $M(7;8)$ và $N(6;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD.

Giải

Do là đường tròn nội tiếp hình thoi, suy ra tâm trùng với giao của hai đường chéo.



Dễ dàng suy ra $AC: x-y+1=0$. Gọi $AB: y=k(x-6)+9$

Có: $d(I;AB)=\frac{|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

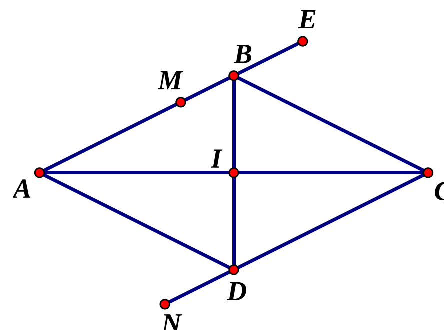
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=\frac{1}{3}\\k=-\frac{13}{9}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}AB: y=\frac{x}{3}+7\\AB: y=-\frac{13}{9}x+\frac{53}{9}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(9;10)\Rightarrow C(1;2)\\A(2;3)\Rightarrow C(8;9)\end{array}\right.$$

Có phương trình $BD: x+y-11=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(3;8)\Rightarrow D(7;4)\\B\left(-\frac{23}{2};\frac{45}{2}\right)\Rightarrow D\left(\frac{43}{3};-\frac{21}{2}\right)\end{array}\right.$

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có $AC=2BD$ và $I(2;1)$ là giao điểm hai đường chéo. Biết $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ nằm trên đường thẳng AB, $N(0;7)$ nằm trên đường thẳng CD. Tìm tọa độ điểm B biết B có hoành độ dương.

Giải

Gọi E là điểm đối xứng của N qua I thì $E(4;-5)\in AB$



$\Rightarrow AB: 4x+3y-1=0$

$d(I;AB)=2$. Vì $AC=2BD$ nên $AI=2BI$

Trong tam giác vuông ABI ta có: $\frac{1}{4}=\frac{1}{d^2(I;AB)}=\frac{1}{4BI^2}+\frac{1}{BI^2}\Rightarrow BI^2=5$

B là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{5}$ với đường thẳng AB nên tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x+3y-1=0\\(x-2)^2+(y-1)^2=5\end{cases}$

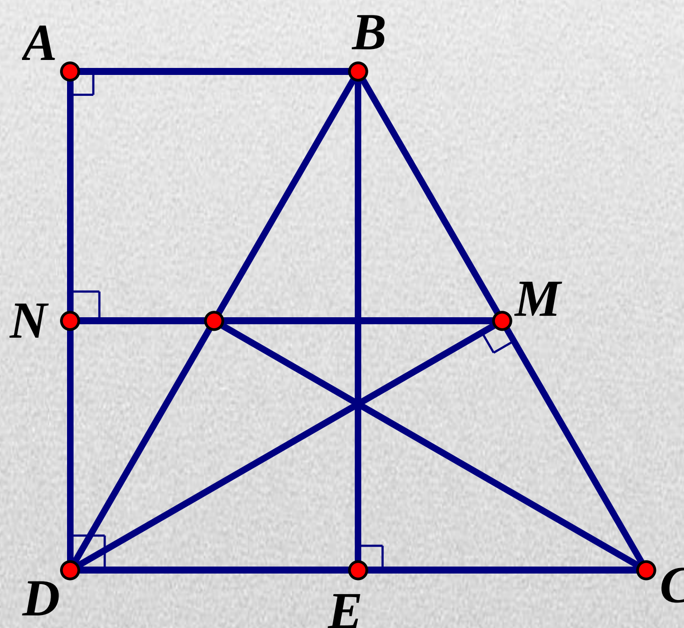
Giải hệ trên, kết hợp với $x_B>0$ ta có $B(1;-1)$.

TRẦN ĐÌNH CƯ
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia

Hạ gục Oxy

Chủ đề 3: Hình Thang

Tài liệu mến tặng các em học sinh 12, chuẩn bị bước vào kỳ thi THPT Quốc Gia. Chúc các em đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến.

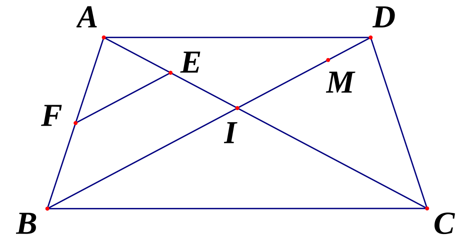


Huế, 14/05/2016

CHỦ ĐỀ 3. HÌNH THANG

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD $(AD//BC)$ có phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$ và đường thẳng $AC: y-2=0$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân ABCD, biết $IB=\sqrt{2}IA$, hoành độ điểm $I: x_I>-3$ và điểm $M(-1;3)$ nằm trên đường thẳng BD.

Giải



Ta có A là giao điểm của AB và AC nên $A(1;2)$.

Lấy $E(0;2)\in AC$. Gọi $F(2a-3;a)\in AB$ sao cho $EF//BD$.

Khi đó $\frac{EF}{BI}=\frac{AE}{AI}\Leftrightarrow\frac{EF}{AE}=\frac{BI}{AI}=\sqrt{2}\Leftrightarrow EF=\sqrt{2}AE$

$\Leftrightarrow(2a-3)^2+(a-2)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=\frac{11}{5}\end{array}\right.$

Với $a=1$ thì $\overrightarrow{EF}=(-1;-1)$ là vtcp của đường thẳng BD. Nên chọn vtpt của BD là $\vec{n}=(1;-1)$. Pt $BD: x-y+4=0\Rightarrow BD\cap AC=I(-2;2), BD\cap AB=B(-5;-1)$

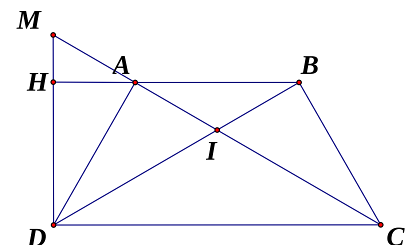
Ta có: $\overrightarrow{IB}=-\frac{IB}{ID}\overrightarrow{ID}=-\frac{IB}{IA}\overrightarrow{ID}=-\sqrt{2}\overrightarrow{ID}\Rightarrow D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2;\frac{3}{\sqrt{2}}+2\right)$

$\overrightarrow{IA}=-\frac{IA}{IC}\overrightarrow{IC}=-\frac{IA}{IB}\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{IC}\Rightarrow C\left(-3\sqrt{2}-2;2\right)$

Với $a=\frac{11}{5}$ thì $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)$ là vtcp của đường thẳng BD. Nên chọn vtpt của BD là $\vec{n}=(1;-7)$. Do đó $BD: x-7y+22=0\Rightarrow I(-8;2)$ (loại)

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD có $AB//CD, CD=2AB$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là điểm đối xứng của I qua A với $M\left(\frac{2}{3};\frac{17}{3}\right)$. Biết phương trình đường thẳng $DC: x+y-1=0$ và diện tích hình thang ABCD bằng 12. Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm C có hoành độ dương.

Giải



Ta có: tam giác MDC vuông tại D

$\Rightarrow MD: x-y+5=0\Rightarrow D(-2;3)$

$MD=\frac{8\sqrt{2}}{3}\Rightarrow HD=\frac{3}{4}MD=2\sqrt{2}$

Gọi $AB=a$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{3a.2\sqrt{2}}{2}=12\Rightarrow a=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow DC=4\sqrt{2}$

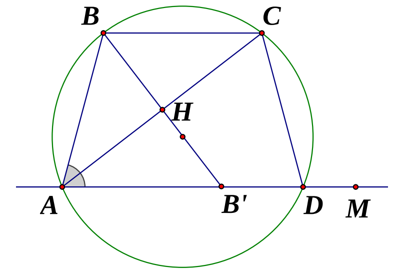
Gọi $C(c;1-c)\Rightarrow DC^2=2(c+2)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=2\\ c=-6\quad\text{(loại)}\end{array}\right.\Rightarrow C(2;-1)$

$\Rightarrow B(3;2)$

$\Rightarrow BC: 3x-y-7=0$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD với hai đáy AD, BC. Biết $B(2;3)$ và $AB = BC$. Đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$, điểm $M(-2;-1)$ nằm trên đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD.

Giải



Vì ABCD là hình thang cân nên nội tiếp trong một đường tròn. Mà $BC = CD$ nên AC là đường phân giác của góc BAD

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua AC. Khi đó $B' \in AD$

Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;2)$$

Vì B′ đối xứng với B qua AC nên H là trung điểm của BB′. Do đó $B'(4;1)$

Đường thẳng AD đi qua M và nhận $\overrightarrow{MB'}$ làm vec-tơ chỉ phương nên có phương trình $x - 3y - 1 = 0$. Vì $A = AC \cap AD$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$

Ta có ABCB′ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'C}$. Do đó $C(5;4)$

Gọi d là đường trung trực của BC, suy ra $d: 3x + y - 14 = 0$

Gọi $I = d \cap AD$, suy ra I là trung điểm của AD. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

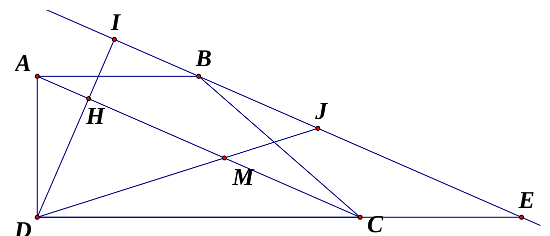
$$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right). \text{ Do đó } D\left(\frac{38}{5};\frac{11}{5}\right)$$

Vậy, đường thẳng CD đi qua C và nhận $\overrightarrow{CD}$ làm vec-tơ chỉ phương nên có phương trình $9x + 13y - 97 = 0$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với hai cạnh đáy là AB, CD và $CD = 2AB$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC và M là trung điểm của HC. Biết tọa độ đỉnh $B(5;6)$, phương trình đường thẳng $DH: 2x - y = 0$ và $DM: x - 3y + 5 = 0$, tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

Giải

Tìm được tọa độ $D(1;2)$



Qua B dựng đường thẳng $\Delta // AC$ và cắt DH tại I, cắt DM tại J, cắt DC tại E

$\Rightarrow \Delta \perp DH$ và J là trung điểm của IE.

Phương trình đường thẳng Δ qua B và vuông góc với DH là: $x + 2y - 17 = 0$

Tọa độ $I\left(\frac{17}{5};\frac{34}{5}\right)$, tọa độ $J\left(\frac{41}{5};\frac{22}{5}\right) \Rightarrow E(13;2)$

Ta có ABEC là hình bình hành $\Rightarrow EC = AB$

Do đó $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} \Rightarrow C(9;2)$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow A(1;6)$

Cách khác:

Gọi K là trung điểm của DC. Khi đó, KM vuông góc với AC. $KM=\frac{1}{2}DH$. Chứng minh được $d(B;AC)=KM$, từ đó suy ra $d(D;AC)=2d(B;AC)$ (với $D(1;2)$, $B(5;6)$, $CA: x+2y+m=0$), lập được pt AC, giải hệ tìm được tọa độ H, M, từ đó có tọa độ C, A.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang ABCD có đáy lớn $CD=3AB$, $C(-3;-3)$, trung điểm của AD là $M(3;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B biết $S_{BCD}=18$, $AB=\sqrt{10}$ và đỉnh D có hoành độ nguyên dương.

Giải

B A M C D

Gọi $\vec{n}=(A;B)$ là vec-tơ pháp tuyến của CD $\left(A^2+B^2>0\right)$

$\Rightarrow CD: A(x+3)+B(y+3)=0$

$\Leftrightarrow Ax+By+3A+3B=0$

Ta có: $S_{BCD}=S_{ACD}=18$

$\Rightarrow d(A;CD)=\frac{2S_{ACD}}{CD}=\frac{36}{3\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}\Rightarrow d(M;CD)=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{|3A+B+3A+3B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow 5|6A+4B|=3\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}$

$\Leftrightarrow 25\left(36A^2+48AB+16B^2\right)=90\left(A^2+B^2\right)$

$\Leftrightarrow 810A^2+1200AB+310B^2=0\Leftrightarrow A=-\frac{B}{3}$ hay $A=-\frac{31B}{27}$

* $A=-\frac{B}{3}$: Chọn $B=-3\Rightarrow A=1\Rightarrow CD: x-3y-6=0\Rightarrow D(3d+6;d)$

Ta có: $CD^2=90\Leftrightarrow (3d+9)^2+(d+3)^2=90\Leftrightarrow (d+3)^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=0\\ d=-6\end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(6;0)\ \text{(nhận)}\\ D(-12;-6)\ \text{(loại)}\end{array}\right.$. Vậy $D(6;0)\Rightarrow A(0;2)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=(-3;-1)\Rightarrow B(-3;1)$

* $A=-\frac{31}{27}B$: Chọn $B=-27\Rightarrow A=31\Rightarrow CD: 31x-27y+12=0$

$\Rightarrow D\left(d;\frac{31d+12}{27}\right)\Rightarrow CD^2=(d+3)^3+\left(\frac{31d+93}{27}\right)^2=90\Rightarrow (d+3)^2=\frac{729}{169}$ (loại)

Vậy $B(-3;1)$

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình thang OABC $(OA//BC)$ có diện tích bằng 6, đỉnh $A(-1;2)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1: x+y+1=0$ và đỉnh C thuộc đường thẳng $d_2: 3x+y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Giải

Phương trình $OA: \frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-0}{2-0}\Leftrightarrow 2x+y=0$

$OA//BC\Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC có dạng: $2x+y+m=0$ (với $m\neq 0$)

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-m \\ y=m-2 \end{cases} \Rightarrow B(1-m;m-2)$

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+y+2=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=m-2 \\ y=4-3m \end{cases} \Rightarrow C(m-2;4-3m)$

Diện tích hình thang OABC là: $S=\frac{1}{2}(OA+BC).d(O,BC)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\sqrt{(-1)^2+2^2}+\sqrt{(2m-3)^2+(4m-6)^2}\right].\frac{|m|}{\sqrt{2^2+1^2}}=6$

$\Leftrightarrow (|2m-3|+1)|m|=12 \;\; (*)$

Phương án tối ưu nhất để giải phương trình này sẽ là phá dấu giá trị tuyệt đối.

- Nếu $m<0$ thì (*) thành $(3-2m+1)(-m)=12 \Leftrightarrow m^2-2m-6=0 \Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{7}$

Kiểm tra điều kiện ta chỉ lấy nghiệm $m=1-\sqrt{7} \Rightarrow B\left(\sqrt{7};-1-\sqrt{7}\right)$ và $C\left(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7}\right)$

- Nếu $0\le m<\frac{3}{2}$ thì (*) thành $(3-2m+1)m=12 \Leftrightarrow m^2-2m+6=0$ (vô nghiệm)

- Nếu $m\ge\frac{3}{2}$ thì (*) thành $(2m-3+1)m=12 \Leftrightarrow m^2-m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Kiểm tra điều kiện ta chỉ lấy nghiệm $m=3 \Rightarrow B(-2;1)$ và $C(1;-5)$

Vậy có hai cặp điểm B, C thỏa mãn đề bài như trên.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại C, D có $BC=2AD=2DC$, đỉnh $C(3;-3)$, đỉnh A nằm trên đường thẳng $d:3x+y-2=0$, phương trình đường thẳng $DM:x-y-2=0$ với M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{CM}$. Xác định tọa độ các điểm A, D, B.

Giải

Vì $A\in d \Rightarrow A(a;2-3a)$

Ta có $S_{\Delta ADM}=2S_{DCM} \Rightarrow d(A,DM)=2d(C,DM)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow A(3;-7) \\ a=3 \Rightarrow A(-1;5) \end{array}\right.$

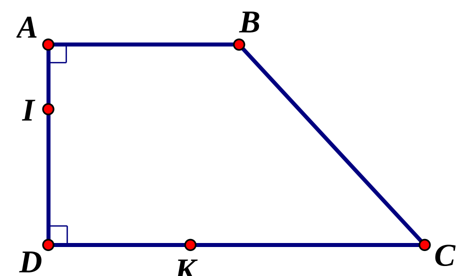
Do A, C nằm khác phía với đường thẳng DM nên $A(-1;5)$

Vì $D\in DM \Rightarrow D(d;d-2)$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AD\perp CD \\ AD=CD \end{cases}$. Giải hệ ta được $d=5$ nên $D(5;3)$

Có $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD} \Rightarrow B(-9;1)$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D; diện tích hình thang bằng 6, $CD=2AB$, $B(0;4)$. Biết điểm $I(3;-1)$, $K(2;2)$ lần lượt nằm trên đường thẳng AD và DC. Viết phương trình đường thẳng AD biết AD không song song với các trục tọa độ.

Giải



Vì AD không song song với các trục tọa độ nên gọi vec-tơ pháp tuyến của AD là $\vec{n}=(1;b), b\ne 0$. Suy ra phương trình AD: $(x-3)+b(y+1)=0$

Pt AB: $bx-(y-4)=0$

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.AD=\frac{3AB}{2}.AD=\frac{3}{2}.d(B;AD).d(K;AB)=\frac{3}{2}.\frac{|-3+5b|}{\sqrt{b^2+1}}.\frac{|2b+2|}{\sqrt{b^2+1}}$$

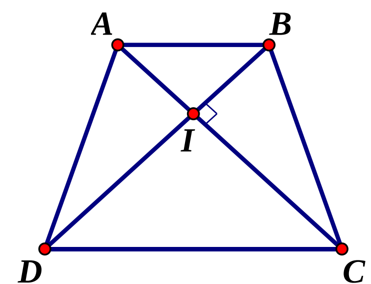
$$S_{ABCD}=6\Leftrightarrow 3.\frac{|-3+5b|}{\sqrt{b^2+1}}.\frac{|b+1|}{\sqrt{b^2+1}}=6\Leftrightarrow |5b-3|.|b+1|=2\left(b^2+1\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-\frac{5}{3} \\ b=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{7}\end{array}\right.$$

Đáp số: $x+y-2=0$; $3x-5y-14=0$; $7x-\left(1+2\sqrt{2}\right)y-2\sqrt{2}-22=0$;

$7x-\left(1-2\sqrt{2}\right)y+2\sqrt{2}-22=0$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có diện tích bằng $\frac{45}{2}$, đáy lớn CD có phương trình là: $x-3y-3=0$. Biết hai đường chéo BD và AC vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm C có hoành độ dương.

Giải



Ta có ABCD là hình thang cân nên tam giác ICD vuông cân tại I.

$CD=2d(I;CD)=2\sqrt{10}\Rightarrow IC=\sqrt{20}$

Gọi điểm $C(3c+3;c)\in CD$

$\Rightarrow IC^2=(3c+1)^2+(c-3)^2=20$

$\Rightarrow c=\pm 1\Rightarrow C(6;1)$

Đường thẳng BD qua điểm $I(2;3)$ nhận $\overrightarrow{IC}$ làm vtpt có phương trình là:

$2x-y-1=0$.

Gọi D là giao điểm của BD và CD $\Rightarrow D(0;-1)$

Đặt $IA=IB=x>0$, ta có:

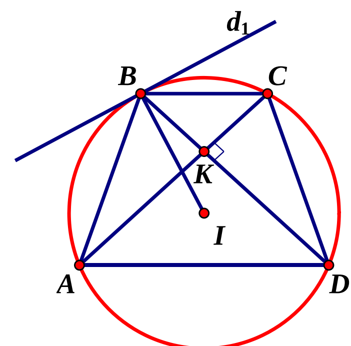
$S_{ABCD}=S_{IAB}+S_{ICD}+2S_{IAD}=\frac{1}{2}x^2+10+2x\sqrt{5}=\frac{45}{2}\Rightarrow x=\sqrt{5}$

Khi đó $ID=2IB\Rightarrow \overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IB}\Rightarrow B(3;5)$.

Phương trình đường thẳng BD: $4x+3y-27=0$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I $(x_I>0)$, (C) đi qua điểm $A(-2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d_1): x+y+4=0$ tại điểm B. (C) cắt $(d_2): 3x+4y-16=0$ tại C và D sao cho ABCD là hình thang có hai đáy là AD và BC, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

Giải



Do ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn nên ABCD là hình thang cân. Do hai đường chéo vuông góc với nhau tại K nên ΔBKC vuông cân tại K, suy ra $ACB=45^0\Rightarrow AIB=90^0$ (góc ở tâm cùng chắn cung AB) hay $IB\perp AI$ (1).

Lại do (d_1) tiếp xúc với (C) tại B nên $IB\perp(d_1)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$IB = d(A;d_1) = \frac{5}{\sqrt{2}}, (AI // (d_1))$

Ta có pt AI: $x + y - 1 = 0$, do $I \in AI \Rightarrow I(a;1-a)$, $IA = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{9}{2} \end{array}\right.$

Vậy $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ do $(x_I > 0)$.

Pt đường tròn $(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Xét hệ: $\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \\ 3x + 4y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

B là hình chiếu của I lên (d_1), tính được $B(-2;-2)$.

Do $AD // BC$ nên $B(-2;-2), C(4;1), D(0;4)$.

Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B. Đường chéo AC nằm trên đường thẳng $(d): 4x + 7y - 28 = 0$. Đỉnh B thuộc đường thẳng $(\Delta): x - y - 5 = 0$, đỉnh A có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ A, B, C biết đỉnh $D(2;5)$ và $BC = 2AD$.

Giải

$B \in (\Delta) \Rightarrow B(b;b-5)$

Ta có: $\frac{d(B,AC)}{d(D,AC)} = \frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AD} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{|4b + 7(b-5) - 28|}{\sqrt{4^2 + 7^2}} = 2.\frac{|4.2 + 7.5 - 28|}{\sqrt{4^2 + 7^2}} \Leftrightarrow |11b - 63| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11b - 63 = 30 \\ 11b - 63 = -30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{93}{11} \\ b = 3 \end{array}\right.$

B và D ở khác phía đối với đường thẳng AC nên $(4x_B + 7y_B - 28)(4x_D + 7y_D - 28) < 0 \Leftrightarrow (11b - 63).30 < 0$

Do đó ta được $b = 3 \Rightarrow B(3;-2)$

Ta có $A \in (d) \Rightarrow A\left(a;\frac{28-4a}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \left(a - 2;\frac{-4a-7}{7}\right)$ và $\overrightarrow{BA} = \left(a - 3;\frac{-4a+42}{7}\right)$

Do đó $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3) + \frac{(-4a-7)(-4a+42)}{49} = 0$

$\Leftrightarrow 65a^2 - 385a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hay $a = \frac{77}{13}$. Vậy $A(0;4)$

Ta có $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 3 = 2.(2-0) \\ y_C + 2 = 2.(5-4) \end{cases} \Rightarrow C(7;0)$

Vậy $A(4;0)$, $B(3;-2)$ và $C(7;0)$ là điểm cần tìm.

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang ABCD có diện tích bằng $\frac{45}{2}$, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng $x - 3y - 3 = 0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, biết điểm C có hoành độ dương.

Giải

Do ABCD là hình thang cân với đáy lớn CD và hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau nên tam giác ICD vuông cân tại I.

Đường thẳng qua I vuông góc với CD: $x-3y-3=0$ có phương trình:

$3(x-2)+(y-3)=0 \Leftrightarrow 3x+y-9=0$

Gọi K là trung điểm CD ta có tọa độ K là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-3y-3=0 \\ 3x+y-9=0 \end{cases} \Rightarrow K(3;0)$

Mà $KI=KC=KD$ nên C, D là giao điểm của đường thẳng CD và đường tròn tâm K bán kính $KI=\sqrt{10}$

Do đó tọa độ của chúng là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ (x-3)^2+y^2=10 \end{cases}$

$\Rightarrow C(6;1);\ D(0;-1)$ do C có hoành độ dương.

Gọi H là trung điểm AB ta có:

$\frac{45}{2}=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD).HK=(IH+IK).HK=\left(IH+\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow IH=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Mà $\frac{ID}{IB}=\frac{IK}{IH}=2 \Rightarrow \overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B(3;5) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(3;-4)$

Vậy đường thẳng BC có phương trình $4(x-3)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-27=0$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $AB=AD<CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình $y=2$. Biết rằng đường thẳng $(d): 7x-y-25=0$ lần lượt cắt các đoạn thẳng AD và CD theo thứ tự tại M và N sao cho $BM\perp BC$ và tia BN là tia phân giác của góc MBC. Tìm tọa độ đỉnh D (với hoành độ của D là số dương)

Giải

Kẻ $BH\perp CD \Rightarrow ABHD$ là hình vuông và $CBN=MBN=45^0$

$\Rightarrow \Delta CBN=\Delta MBN$

Vậy $d(B;CD)=d(B;MN)$ mà $d(B;MN)=\frac{|7-2-25|}{\sqrt{50}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow BH=\frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow BD=BH\sqrt{2}=4$

Điểm D thuộc BD nên $D(x_0;2)$ và $BD=4$.

Ta có $(x_0-1)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=5 \\ x_0=-3 \end{array}\right.$

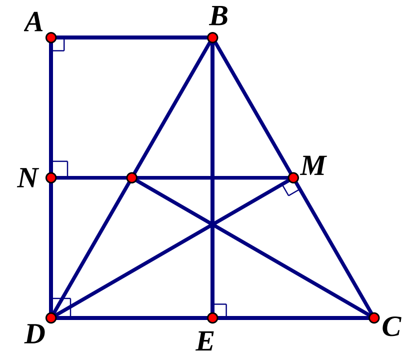
Theo giả thiết $x_0>0$. Vậy $D(5;2)$

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang vuông ABCD ($BAD=ADC=90^0$). Biết $BC=CD=2AB$; trung điểm của BC là $M(1;0)$, đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình $x-\sqrt{2}y=0$. Tìm tọa độ A.

Giải

Kẻ $BE\perp CD,\ (E\in CD)$

Vì $DE=AB=\frac{1}{2}CD$ nên E là trung điểm CD, do đó ΔBCD cân. Mà $BC=CD$ nên ΔBCD đều. Suy ra $DM=BE=AD$.



Gọi N là trung điểm AD, ta có $MN \perp AD$

Suy ra phương trình MN: $\sqrt{2}x + y - \sqrt{2} = 0$

Tọa độ N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y - \sqrt{2} = 0 \\ x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ hay } N\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$A \in AD: x - \sqrt{2}y = 0 \Rightarrow A\left(\sqrt{2}a; a\right) \Rightarrow D\left(\dfrac{4}{3} - \sqrt{2}a; \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - a\right)$$

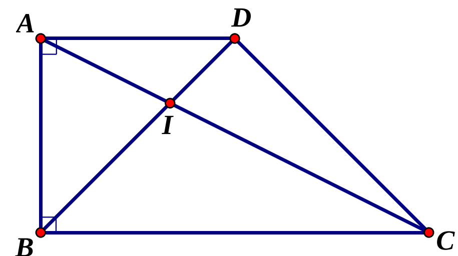
$$DM = AD \Leftrightarrow \sqrt{\left(\dfrac{1}{3} - a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - a\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4}{3} - 2\sqrt{2}a\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - 2a\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6\sqrt{2}a + \dfrac{15}{6} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{9} \\ a = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{}9 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ $A\left(\dfrac{6 - \sqrt{6}}{9}; \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{9}\right)$, $A\left(\dfrac{6 + \sqrt{6}}{9}; \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{9}\right)$

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại $A(-2;3)$ và B, $AB = AD = \dfrac{BC}{2}$. Giao điểm của hai đường chéo AC và BD là $I\left(-\dfrac{1}{3}; 3\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết đỉnh D có hoành độ nguyên nằm trên đường thẳng d: $3x + y - 4 = 0$.

Giải



Ta có $AI = \dfrac{5}{3}$.

Theo định lý Talet: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IC} = 2.\overrightarrow{AI} = \left(\dfrac{10}{3}; 0\right)$

Giả sử $C(x_0; y_0) \Rightarrow \overrightarrow{IC} = \left(x_0 + \dfrac{1}{3}; y_0 - 3\right)$

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3} \\ y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow C(3;3)$$

Ta có $AC = 3.AI = 5$. Áp dụng hệ thức Pytago: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5AD^2 = 25 \Leftrightarrow AD = \sqrt{5}$

Vì $D \in d \Rightarrow D(t; 4 - 3t)$; $AD = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t+2)^2 + (1-3t)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 10t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Với $t = 0 \Rightarrow D(0;4) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (2;1)$, có $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow B(-1;1)$

Với $t = \dfrac{1}{5} \Rightarrow D\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{17}{5}\right)$ (loại)

Vậy $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(0;4)$

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có AD và BC là hai đáy, $AB = BC = 5$. Biết rằng điểm $E(2;1)$ thuộc cạnh AB, điểm $F(-2;-5)$ thuộc cạnh AD và phương trình đường thẳng AC là $x - 3y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.

(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học – Huế lần 2 – 2014)

Giải

Do ABCD là hình thang cân nên nó là một tứ giác nội tiếp. Mặt khác, vì $AB = BC = CD$ nên AC là phân giác trong góc BAD.

AC có vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{AC}} = (3;1)$

Gọi $H(3t + 3; t)$ là hình chiếu của E trên AC. Ta có $\overrightarrow{EH} = (3t + 1; t - 1)$

$\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{u_{AC}} \Leftrightarrow 3(3t + 1) + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow H\left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

Gọi M là điểm đối xứng của E qua AC thì M thuộc AD. Ta có $M\left(\frac{14}{5}; -\frac{7}{5}\right)$

Đường thẳng AD đi qua điểm $F(-2;-5)$ có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{FM} = \left(\frac{24}{5}; \frac{18}{5}\right)$, có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AD}} = (3;-4)$ nên có phương trình AD: $3x - 4y - 14 = 0$. A là giao điểm của AD và AC nên suy ra $A(6;1)$.

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD có $A(3;0)$, $C(-4;1)$, $AD = 2AB = 2BC$ và $DAB = ABC = 90^0$. Tìm tọa độ các điểm B, D.

Giải

Giả sử $B(x;y)$. Từ giả thiết ta có $AB = BC$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = (x+4)^2 + (y-1)^2 \\ (x-3)(x+4) + y(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x + 4 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0,\ y = 4 \\ x = -1,\ y = -3 \end{array}\right.$$

Vậy $B(0;4)$ hoặc $B(-1;-3)$

Gọi M là trung điểm của AD. Từ giả thiết ta suy ra tứ giác ABCM là hình vuông. Từ đó:

Với $B(0;4)$ thì từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ ta tìm được $M(-1;-3) \Rightarrow D(-5;-6)$

Tương tự với $B(-1;-3)$ ta tìm được $M(0;4) \Rightarrow D(-3;8)$

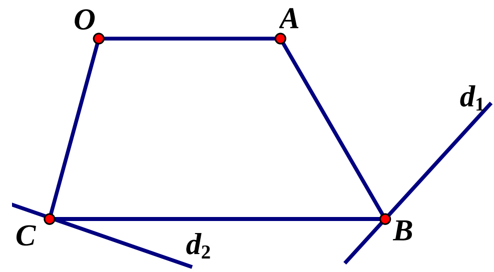
Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang OABC $(OA // BC)$ có diện tích bằng 6, đỉnh $A(-1;2)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1 : x + y + 1 = 0$ và đỉnh C thuộc đường thẳng $d_2 : 3x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Giải

Phương trình OA: $\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y - 0}{2 - 0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$

$OA // BC \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng BC có dạng:

$2x+y+m=0$ (với $m\neq 0$)



Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x+y+1=0\\2x+y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-m\\y=m-2\end{cases}\Rightarrow B(1-m;m-2)$

Tọa độ C là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}3x+y+2=0\\2x+y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m-2\\y=4-3m\end{cases}\Rightarrow C(m-2;4-3m)$

Diện tích hình thang OABC là: $S=\frac{1}{2}(OA+BC).d(O;BC)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\sqrt{(-1)^2+2^2}+\sqrt{(2m-3)^2+(4m-6)^2}\right].\frac{|m|}{\sqrt{2^2+1^2}}=6\Leftrightarrow(|2m-3|+1)|m|=12$ (*)

Phương án tối ưu nhất để giải phương trình này sẽ là phá dấu giá trị tuyệt đối!

Nếu $m<0$ thì (*) trở thành: $(3-2m+1).(-m)=12\Leftrightarrow m^2-2m-6=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{7}$. Kiểm tra điều kiện ta chỉ lấy nghiệm $m=1-\sqrt{7}$, $\Rightarrow B(\sqrt{7};-1-\sqrt{7})$ và $C(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7})$

Nếu $0<m<\frac{3}{2}$ thì (*) thành: $(3-2m+1).m=12\Leftrightarrow m^2-2m+6=0$, vô nghiệm.

Nếu $m\geq\frac{3}{2}$ thì (*) thành: $(2m-3+1).m=12\Leftrightarrow m^2-m-6=0\Leftrightarrow m=3$ hoặc $m=-2$.

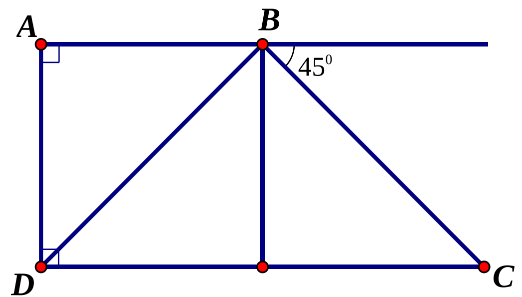
Kiểm tra điều kiện ta chỉ lấy nghiệm $m=3\Rightarrow B(-2;1)$ và $C(1;-5)$

Vậy có hai cặp điểm B, C thỏa mãn đề bài như trên.

Bài 19. Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $3x-y=0$, đường thẳng BD có phương trình $x-2y=0$, góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

Giải

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:



$\begin{cases}3x-y=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow D(0;0)\equiv O$

Vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng AD và BD lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(3;-1),\overrightarrow{n_2}(1;-2)$

$\Rightarrow\cos(ADB)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow ADB=45^0$

$\Rightarrow AD=AB$

Vì góc giữa đường thẳng BC và AB bằng $45^0\Rightarrow BCD=45^0$

$\Rightarrow\Delta BCD$ vuông cân tại B $\Rightarrow DC=2AB$

Theo bài ra ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD).AD=\frac{3AB^2}{2}=24\Rightarrow AB=4\Rightarrow BD=4\sqrt{2}$

Gọi tọa độ điểm $B\left(x_B;\frac{x_B}{2}\right)$, điều kiện $x_B>0$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{x_B^2 + \left(\frac{x_B}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_B = -\frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ (loại)} \\ x_B = \frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Tọa độ điểm $B\left(\frac{8\sqrt{10}}{5};\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Vec-tơ pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{n_{BC}} = (2;1)$

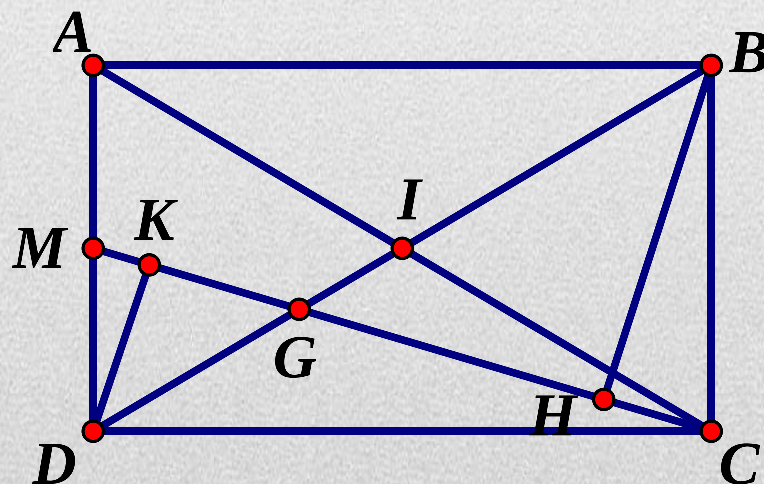
$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC là: $2x + y - 4\sqrt{10} = 0$.

Trần Đình Cư
(Gv Chuyên Luyện Thi THPT Quốc Gia)

Chinh phục Oxy

Chủ Đề: Hình chữ nhật

Tài liệu này mến tặng các em học sinh 12 các Trường ở TP Huế.



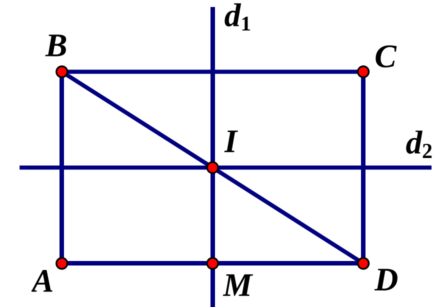
Huế, 10/05/2016

CHỦ ĐỀ 4. HÌNH CHỮ NHẬT

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Giải

Ta có: $d_1 \cap d_2 = I$. Tọa độ của I là nghiệm của hệ:



$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$

Do vai trò A, B, C, D như nhau nên giả sử M là trung điểm cạnh $AD \Rightarrow M = d_1 \cap Ox$. Suy ra $M(3;0)$

Ta có: $AB = 2IM = 2\sqrt{\left(3-\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$

Theo giả thiết: $S_{ABCD} = AB.AD = 12 \Leftrightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Vì I và M cùng thuộc đường thẳng $d_1 \Rightarrow d_1 \perp AD$

Đường thẳng AD đi qua $M(3;0)$ và vuông góc với d_1 nhận $\vec{n}(1;1)$ làm vtpt nên có pt: $(x-3)+(y-0)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$. Lại có: $MA = MD = \sqrt{2}$

Tọa độ A, D là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ (x-3)^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ (x-3)^2+(3-x)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x-3=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $A(2;1)$, $D(4;-1)$

Do $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC suy ra $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 9-2=7 \\ y_C = 2y_I - y_A = 3-1=2 \end{cases}$

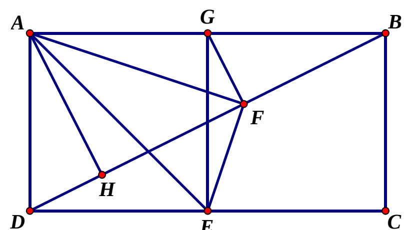
Tương tự I cũng là trung điểm của BD nên ta có $B(5;4)$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $(2;1)$, $(5;4)$, $(7;2)$, $(4;-1)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E, F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng EF là $3x-y-10=0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

(Trích Trường THPT Quỳnh Lưu 3, Nghệ An lần 1 – 2015)

Giải



Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH, AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$.

Ta thấy các tứ giác ADEG và ADFG nội tiếp nên tứ giác ADEF cũng nội tiếp, do đó $AF \perp EF$.

Đường thẳng AF có pt: $x+3y-4=0$

Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x-y=10\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow F\left(\frac{17}{5};\frac{1}{5}\right)\Rightarrow AF=\sqrt{\frac{32}{5}}$$

$$\Delta AFE\sim\Delta DCB\Rightarrow EF=\frac{1}{2}AF=2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$E(t;3t-10)\Rightarrow EF^2=\frac{8}{5}\Leftrightarrow\left(t-\frac{17}{5}\right)^2+\left(3t-\frac{51}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2-34t+57=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\dfrac{19}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}E(3;-1)\\E\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{7}{5}\right)\end{array}\right.$$

Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, pt $AE: x+y-2=0$. Gọi $D(x;y)$, tam giác ADE vuông cân tại D nên:

$$\begin{cases}AD=DE\\AD\perp DE\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+1)^2\\(x-1)(x-3)=(y-1)(y+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\(x-1)(x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\Rightarrow D(1;-1)\vee D(3;1)$$

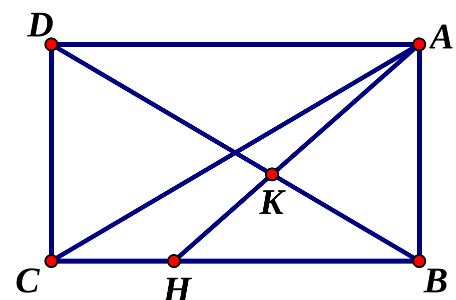
Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên $D(1;-1)$.

Khi đó $C(5;-1)$, $B(1;5)$. Vậy $B(1;5)$, $C(5;-1)$ và $D(1;-1)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $ACD=\alpha$ với $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, điểm H thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{HB}=-2\overrightarrow{HC}$, K là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD. Cho biết $H\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $K(1;0)$ và điểm B có hoành độ dương. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D.

(Trích Trường THPT Chuyên ĐH Vinh, lần 1 – 2015)

Giải



Do ΔKAD đồng dạng với ΔKHB

$$\Rightarrow\frac{KA}{KH}=\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{BH}=\frac{3}{2}\Rightarrow KA=\frac{3}{2}KH$$

Do K thuộc đoạn AC $\Rightarrow\overrightarrow{KA}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{KH}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A-x_K=-\dfrac{3}{2}(x_H-x_K)\\y_A-y_K=-\dfrac{3}{2}(y_H-y_K)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=2\\y_A=2\end{cases}\Rightarrow A(2;2)$$

Đặt $B(a;b)$ với $a>0$, ta có:

$$\cos\alpha=\cos ACD=\cos ABD=\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{\frac{5}{2}KB}=\frac{2}{5}.\frac{AB}{KB}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 4AB^2=5KB^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[(a-2)^2+(b-2)^2\right]=5\left[(a-1)^2+b^2\right]\Leftrightarrow a^2+b^2+6a+16b-27=0$$

Đường tròn (C) đường kính AH có tâm $I\left(\frac{7}{6};\frac{1}{3}\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\frac{5\sqrt{5}}{6}$ nên có phương trình là:

$$(C):\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{125}{36}$$

Do $ABC=90^0 \Rightarrow B\in(C)\Rightarrow\left(a-\frac{7}{6}\right)^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{125}{36}$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-\frac{7}{3}a-\frac{2}{3}b-2=0$$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}a^2+b^2+6a+16b-27=0\\ a^2+b^2-\frac{7}{3}a-\frac{2}{3}b-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{5}\\ b=\frac{8}{5}\end{cases}\vee\begin{cases}a=3\\ b=0\end{cases}\Rightarrow B(3;0)$$

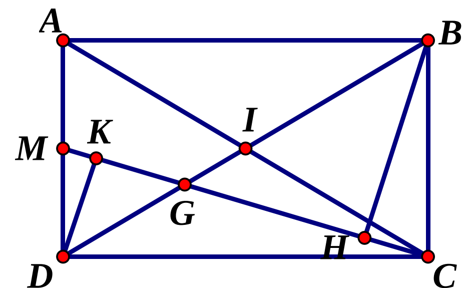
Do $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BH}\Rightarrow C(-1;-2)$ và $\overrightarrow{BD}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BK}\Rightarrow D(-2;0)$

Vậy $A(2;2)$, $B(3;0)$, $C(-1;-2)$, $D(-2;0)$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $D(4;5)$. Điểm M là trung điểm của đoạn AD, đường thẳng CM có phương trình $x-8y+10=0$. Điểm B nằm trên đường thẳng $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và C, biết rằng điểm C có tung độ $y<2$.

(Trích Trường THPT Đào Duy Từ, Thanh Hóa lần 1 – 2015)

Giải



Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của B, D lên CM.

$$DK=\frac{|4-8.5+10|}{\sqrt{1^2+(-8)^2}}=\frac{26}{\sqrt{65}}$$

Gọi I, G là giao điểm của BD với AC và CM $\Rightarrow$ G là trọng tâm ΔACD

$$DG=2GI\Rightarrow BG=2DG\Rightarrow\frac{BH}{DK}=\frac{BG}{DG}=2;BH=\frac{52}{\sqrt{65}};$$

$$B(b;-2b-1)\Rightarrow BH=\frac{|17b+18|}{\sqrt{65}}=\frac{52}{\sqrt{65}}\Leftrightarrow|17b+18|=52\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2\\ b=-\frac{70}{17}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

(loại vì điểm B và điểm D cùng phía với đường thẳng CM). Do đó ta có $B(2;-5)\Rightarrow I(3;0)$

$$C(8c-10;c)\Rightarrow\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=(14-8c).(12-8c)+(5-c).(-5-c)=0$$

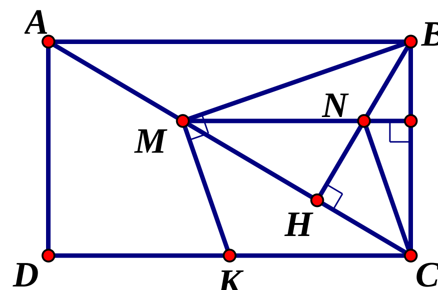
$$\Leftrightarrow 65c^2-208c+143=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\ c=\frac{143}{65}\ \text{(loại do } y_c>2)\end{array}\right.\Rightarrow C(-2;1)\Rightarrow A(8;-1)$$

Vậy $A(8;-1)$, $B(2;-5)$, $C(-2;1)$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AH và BH, trên cạnh CD lấy K sao cho MNCK là hình bình

hành. Biết $M\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right), K(9;2)$ và các đỉnh B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng $2x-y+2=0$ và $x-y-5=0$, hoành độ đỉnh C lớn hơn 4. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Giải



MN là đường trung bình của tam giác HAB suy ra MN // AB và $MN=\frac{1}{2}AB$

MNCK là hình bình hành nên CK // MN và $CK=MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$. Suy ra K là trung điểm của CD và N là trực tâm tam giác MBC, do đó $CN\perp MB$, mà MK // CN nên $MK\perp MB$.

$B\in d: 2x-y+2=0\Rightarrow B(b;2b+2), \overrightarrow{MK}=\left(\frac{36}{5};\frac{8}{5}\right), \overrightarrow{MB}=\left(b-\frac{9}{5};2b+\frac{8}{5}\right)$

$\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow \frac{52}{5}b-\frac{52}{5}=0\Leftrightarrow b=1\Rightarrow B(1;4)$

$C\in d': x-y-5=0\Rightarrow C(c;c-5), (c>4), \overrightarrow{BC}=(c-1;c-9), \overrightarrow{KC}=(c-9;c-7)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{KC}=0\Leftrightarrow (c-1)(c-9)+(c-9)(c-7)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=9\\ c=4\ (L)\end{array}\right.\Rightarrow C(9;4)$

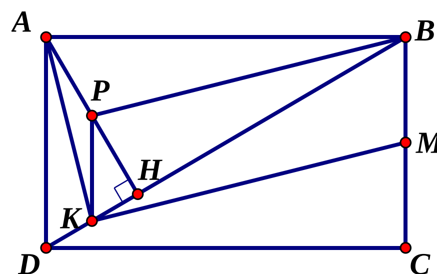
Vì $K(9;2)$ là trung điểm CD và $C(9;4)$ suy ra $D(9;0)$

Gọi I là trung điểm của BD thì $I(5;2)$ và I là trung điểm AC nên $A(1;0)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của ΔAHD là $d: 4x+y-4=0$. Viết phương trình cạnh BC.

Giải

Gọi K là trung điểm HD. Chứng minh AN vuông góc với MN.



Gọi P là trung điểm của AH. Ta có AB vuông góc với KP. Do đó P là trực tâm của tam giác ABK.

Suy ra $BP\perp AK\Rightarrow AK\perp KM$.

Phương trình KM đi qua $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ vuông góc với AN là $KM: x-4y+\frac{15}{2}=0$.

Tọa độ $K\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Do K là trung điểm của HD nên $D(0;2)$, suy ra $BD: y-2=0$.

$AH: x-1=0$ và $A(1;0)\Rightarrow AD: 2x+y-2=0$.

BC qua M và song song với AD nên $BC: 2x+y-12=0$.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $E(3;-4)$, đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(7;4)$ và trung điểm N của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: 4x+y-10=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Gọi $N(a;10-4a)$; N' đối xứng với N qua E, ta có $N'(6-a;4a-18)$. Dễ thấy $E \neq N$

Vì ABCD là hình chữ nhật và N là trung điểm của DC nên ta có:

$$\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{N'M}=0 \Leftrightarrow 17a^2-146a+305=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=\dfrac{61}{17} \end{array}\right.$$

Với $a=5$, ta có đường thẳng AB qua M nhận $\overrightarrow{EN}$ làm vec-tơ pháp tuyến nên phương trình của nó là $AB: x-3y+5=0$

Với $a=\dfrac{61}{17}$, tương tự ta có phương trình đường thẳng $AB: 5x-3y-23=0$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 15. Đường thẳng AB có phương trình $x-2y=0$. Trọng tâm của tam giác BCD là điểm $G\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{13}{3}\right)$. Tìm tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật biết điểm B có tung độ lớn hơn 3.

Hướng dẫn giải

Ta có $d(G;AB)=\dfrac{10}{3\sqrt{5}} \Rightarrow BC=\dfrac{3}{2}.\dfrac{10}{3\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Rightarrow AB=3\sqrt{5}$

Đường thẳng d đi qua G vuông góc với $AB \Rightarrow d: 2x+y-15=0$

Gọi $N=d\cap AB \Rightarrow N(6;3)$. Suy ra $NB=\dfrac{1}{3}AB=\sqrt{5}$

Gọi $B(2b;b)\in AB \Rightarrow NB^2=5 \Leftrightarrow b^2-6b+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b=2 & (\text{loại}) \\ b=4 & \end{array}\right. \Rightarrow B(8;4)$

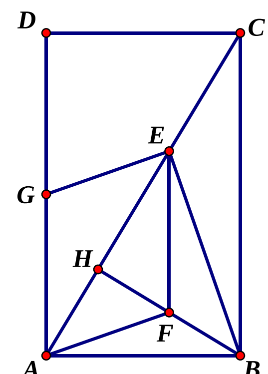
Ta có:

$\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BN} \Rightarrow A(2;1)$; $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow C(7;6)$; $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow D(1;3)$

Đáp số $A(2;1)$, $B(8;4)$, $C(7;6)$, $D(1;3)$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại H. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CH, BH và AD. Biết rằng $E\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{29}{5}\right)$, $F\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{9}{5}\right)$ và $G(1;5)$.Tìm tọa độ điểm A và tọa độ tâm đường tòn ngoại tiếp tam giác ABE.

Giải



* Ta có EF là đường trung bình của ΔBCH nên $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}$.

Mặt khác $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{GA}$. Suy ra $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GA}$

Gọi $A(x;y)$ ta có:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-5=-4 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Vậy điểm $A(1;1)$

* Do $EF//BC$, $AB\perp BC$ nên $EF\perp AB$, từ giả thiết ta có $BH\perp AC$.

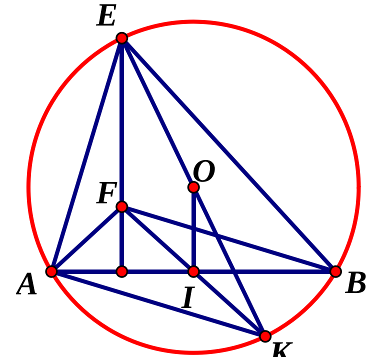
Suy ra F là trực tâm của tam giác ABE. Khi đó B là giao điểm của đường thẳng BH với đường thẳng đi qua A vuông góc với EF.

Ta có $\overrightarrow{EF}=(0;-4)$, nên đường thẳng đi qua A vuông góc với EF có phương trình $y=1$.

Phương trình đường thẳng BH vuông góc với AE là:

$$\frac{12}{5}\left(x-\frac{17}{5}\right)+\frac{24}{5}\left(y-\frac{9}{5}\right)=0\Leftrightarrow x+2y-7=0$$

Vậy tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y=1\\x+2y-7=0\end{cases}\Rightarrow B(5;1)$



Gọi $O(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABE, kẻ đường kính EK.

Ta có tứ giác AKBF là hình bình hành, khi đó hai đường chéo AB và KF cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Ta có $I(3;1)$.

Mặt khác O là trung điểm của EK, suy ra IO là đường trung bình của ΔEFK.

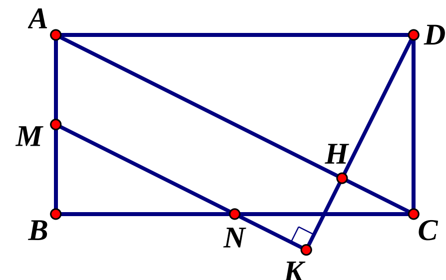
Hay $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=0\\1-y=-2\end{cases}\Rightarrow O(3;3)$

Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE là $O(3;3)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh $D(7;-3)$ và $BC=2AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tìm tọa độ đỉnh C biết phương trình đường thẳng MN là $x+3y-16=0$.

Giải

Gọi K và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên MN và AC.



Phương trình đường thẳng DK là $3x-y-24=0$.

Suy ra tọa độ điểm K thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}x+3y-16=0\\3x-y-24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{44}{5}\\y=\frac{12}{5}\end{cases}\Rightarrow K\left(\frac{44}{5};\frac{12}{5}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{DH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DK}\Rightarrow H\left(\frac{41}{5};\frac{3}{5}\right)$

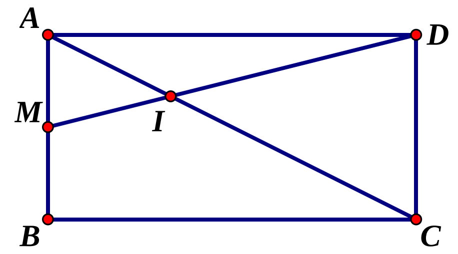
Đường thẳng AC đi qua H song song với MN, suy ra phương trình đường thẳng AC là: $x+3y-10=0\Rightarrow C(10-3c;c)$

Trong tam giác vuông ADC ta có:

$$\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{DH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{4DC^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{\frac{144}{10}}\Leftrightarrow DC=3\sqrt{2}\Leftrightarrow 10c^2-12c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\Rightarrow C(10;0)\\c=\frac{6}{5}\Rightarrow C\left(\frac{32}{5};\frac{6}{5}\right)\end{array}\right.$$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $A(5;-7)$, điểm C thuộc vào đường thẳng có phương trình: $x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn AB có phương trình: $3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ của B và C, biết điểm B có hoành độ dương.

Giải



Gọi $C(c;c+4)\in d_1$, M là trung điểm AB, I là giao điểm của AC và $d_2: 3x-4y-23=0$.

Ta có ΔAIM đồng dạng

$\Delta CID \Rightarrow CI = 2AI \Rightarrow \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IA} \Rightarrow I\left(\frac{c+10}{3};\frac{c-10}{3}\right)$

Mà $I\in d_2$ nên ta có: $3.\frac{x+10}{3}-4.\frac{c-10}{3}-23=0 \Leftrightarrow c=1$

Vậy $C(1;5)$

Ta có: $M\in d_2 \Rightarrow M\left(t;\frac{3t-23}{4}\right) \Rightarrow B\left(2t-5;\frac{3t-9}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(2t-10;\frac{3t+5}{2}\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(2t-6;\frac{3t-19}{2}\right)$

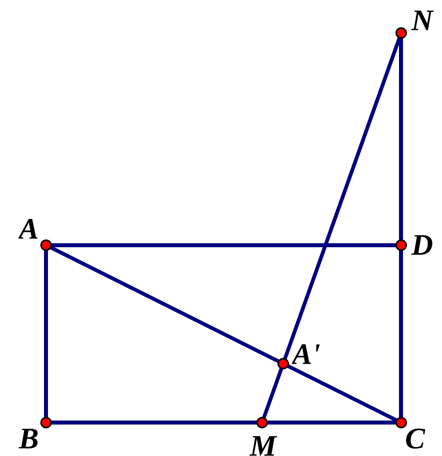
Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow 4(t-5)(t-3)+\frac{1}{4}(3t+5)(3t-19)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{29}{5}\end{array}\right.$

Suy ra $B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)$ hoặc $B(-3;-3)$

Vì B có hoành độ dương nên $B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)$

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đường chéo $AC: x+2y-9=0$. Điểm $M(0;4)$ nằm trên cạnh BC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho biết rằng diện tích của hình chữ nhật đó bằng 6, đường thẳng CD đi qua $N(2;8)$ và đỉnh C có tung độ là một số nguyên.

Giải



Vì $C\in AC: x+2y-9=0 \Rightarrow C(9-2c;c)$

Khi đó: $\overrightarrow{NC}=(7-2c;c-8)$, $\overrightarrow{MC}=(9-2c;c-4)$

Khi đó ta có: $\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{MC}=0$

$\Leftrightarrow (7-2c)(9-2c)-(c-8)(c-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5 \\ c=\frac{19}{5}\end{array}\right.$

Vì C có tung độ là một số nguyên nên $C(-1;5)$

Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt AC tại A'.

Khi đó: $MA': 2x-y+4=0$. Suy ra $A'\left(\frac{1}{5};\frac{22}{5}\right)$

Ta có: $S_{A'MC}=\frac{1}{2}MA'.MC=\frac{1}{3}$

Hai tam giác ABC và A'MC đồng dạng nên:

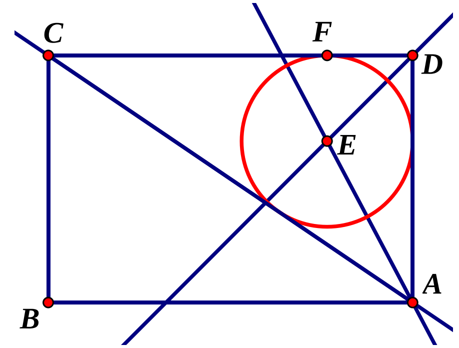
$$\left(\frac{CB}{CM}\right)^2=\frac{S_{ABC}}{S_{A'MC}}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=9 \Rightarrow \overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CM} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_B+1=3.1 \\ y_B-5=3.(-1)\end{array}\right. \Rightarrow B(2;2)$$

Tương tự $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CA'} \Rightarrow A(3;3)$; Từ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow D(0;6)$

Vậy $A(3;3)$, $B(2;2)$, $C(-1;5)$, $D(0;6)$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Hai điểm B, C thuộc trục tung. Phương trình đường chéo $AC: 3x+4y-16=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1.

Giải



Ta có C là giao điểm của trục tung và đường thẳng AC nên $C(0;4)$

Vì bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1 nên bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC cũng bằng 1.

Vì B nằm trên trục tung nên $B(0;b)$. Đường thẳng AB đi qua B vuông góc với $BC \equiv Oy: x=0$ nên $AB: y=b$

Vì A là giao điểm của AB và AC nên $A\left(\frac{16-4b}{3};b\right)$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$S=\frac{2.S_{ABC}}{AB+BC+CA}=\frac{|b-4|.\left|\frac{16-4b}{3}\right|}{|b-4|+\left|\frac{16-4b}{3}\right|+\sqrt{(b-4)^2+\left(\frac{16-4b}{3}\right)^2}}=\frac{1}{3}|b-4|$$

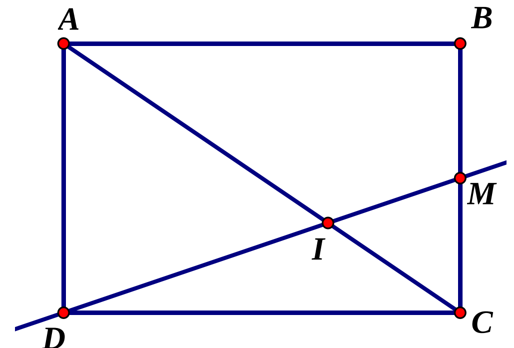
Theo giả thiết $r=1$ nên ta có $b=1$ hoặc $b=7$.

Với $b=1$ ta có $A(4;1)$, $B(0;1)$. Suy ra $D(4;4)$

Với $b=7$ ta có $A(-4;7)$, $B(0;-7)$. Suy ra $D(-4;4)$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh $C(3;-1)$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, đường thẳng DM có phương trình là $y-1=0$. Biết đỉnh A thuộc đường thẳng $5x-y+7=0$ và $x_D<0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và D.

Giải



$DM: y-1=0$

$d(C,DM)=|-1-1|=2$

Ta có: $\frac{d(C,DM)}{d(A,DM)}=\frac{IC}{IA}=\frac{MC}{DA}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(A,DM)=2d(C,DM)=4$

Điểm A thuộc đường thẳng $5x-y+7=0$ nên $A(a;5a+7)$

$d(A,DM)=4 \Leftrightarrow |5a+7-1|=4$

$$\Leftrightarrow |5a+6|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5a+6=4\\5a+6=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-\frac{2}{5}\\a=-2\end{array}\right.$$

Với $a=-2 \Rightarrow A(-2;-3)$. Với $a=-\frac{2}{5} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{5};5\right)$

Điểm $A(-2;-3)$ và $C(3;-1)$ cùng phía so với đường thẳng $DM: y-1=0$ nên loại điểm $A(-2;-3)$.

Vậy $A\left(-\frac{2}{5};5\right)$

$D \in DM \Rightarrow D(x;1) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\left(x+\frac{2}{5};-4\right); \overrightarrow{CD}=(x-3;2)$

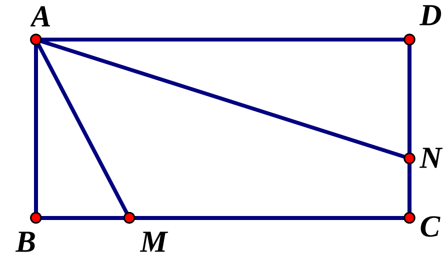
Do $AD \perp CD \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{5}\right)(x-3) - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{46}{5} = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 13x - 46 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{23}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -2$ (vì $x_D < 0$).

Với $x = -2 \Rightarrow D(-2;1)$

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Biết điểm $N(4;2)$ thuộc đoạn CD thỏa mãn $DN = 2NC$. Gọi M là điểm trên đoạn BC sao cho $BC = 4BM$. Tìm tọa độ của điểm A biết phương trình đường thẳng AM: $x + 2y - 18 = 0$.

Giải



Ta có: $\tan BAM = \frac{1}{2}$; $\tan DAN = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan(BAM + DAN) = 1 \Rightarrow MAN = 45^0$

Giả sử $AN: ax + by - 4a - 2b = 0$. Khi đó:

$\cos MAN = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2(a+2b)^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ a = -\frac{b}{3} \end{array}\right.$

Nếu $a = 3b \Rightarrow AN: 3x + y - 14 = 0$ ta được $A(2;8)$

Nếu $b = -3a \Rightarrow AN: x - 3y + 2 = 0$ ta được $A(10;4)$

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có các đỉnh A, B thuộc đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 + 2x + 5y + 1 = 0$, các đỉnh A, D thuộc đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 3y = 3$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật đó biết diện tích của nó bằng 20 và đỉnh A có hoành độ âm.

Hướng dẫn giải

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 5y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y) = (1;-1) \\ (x;y) = (-1;0) \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;0)$

(C_1) có tâm $I\left(-1;-\frac{5}{2}\right)$, bán kính $R_1 = \frac{5}{2}$,

(C_2) có tâm $K\left(1;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_2 = \frac{5}{2}$

Gọi phương trình đường thẳng AB là $a(x+1) + by = 0\ (a^2 + b^2 \neq 0)$. Suy ra phương trình đường thẳng AD là $b(x+1) - ay = 0$

Ta có: $R_1^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (d(I;AB))^2 \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{25b^2}{4(a^2 + b^2)} \Rightarrow AB^2 = \frac{25a^2}{a^2 + b^2}$

$R_2^2=\left(\frac{AD}{2}\right)^2+\left(d(K;AD)\right)^2\Rightarrow \frac{25}{4}=\frac{1}{4}AD^2+\frac{(4b-3a)^2}{4(a^2+b^2)}\Rightarrow AD^2=\frac{(4a+3b)^2}{a^2+b^2}$

Mặt khác, $AB.AD=20$ nên $\frac{25a^2}{a^2+b^2}.\frac{(4a+3b)^2}{a^2+b^2}=20^2$

$\Leftrightarrow (4a^2+3ab)^2=16(a^2+b^2)^2\Leftrightarrow (8a^2+3ab+4b^2)(4b^2-3ab)=0\Leftrightarrow b(4b-3a)=0$

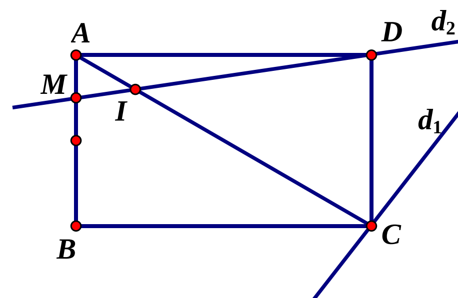
Với $b=0$ chọn $a=1$, ta được AB: $x=-1$, AD: $y=0$. Suy ra $B(-1;-5)$, $D(3;0)$ và CD: $x=3$, BC: $y=-5$

Với $3a=4b$, chọn $a=4\Rightarrow b=3$, ta được AB: $4x+3y+4=0$, AD: $3x-4y+3=0$. Suy ra $B\left(\frac{7}{5};-\frac{16}{5}\right)$, $D(3;3)$ và CD: $4x+3y-21=0$,

BC: $3x-4y-17=0$.

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $A(5;-7)$, M là điểm sao cho $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, điểm C thuộc đường thẳng $(d_1): x-y+4=0$. Đường thẳng (d_2) đi qua D và M có phương trình: $7x-6y-57=0$. Tìm tọa độ của B và C, biết điểm B có hoành độ âm.

Giải



Gọi $C(c;c+4)\in d_1$, I là giao điểm của AC và $d_2: 7x-6y-57=0$

Ta có ΔAIM đồng dạng $\Delta CID\Rightarrow CI=4AI\Rightarrow \overrightarrow{CI}=4\overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow I\left(\frac{c+20}{5};\frac{c-24}{5}\right)$

Mà $I\in d_2$ nên ta có: $7.\frac{c+20}{5}-6.\frac{c-24}{5}-57=0\Leftrightarrow c=1$. Vậy $C(1;5)$

Ta có: $M\in d_2\Rightarrow M\left(t;\frac{7t-57}{6}\right)\Rightarrow B\left(4t-15;\frac{14t-51}{3}\right)$

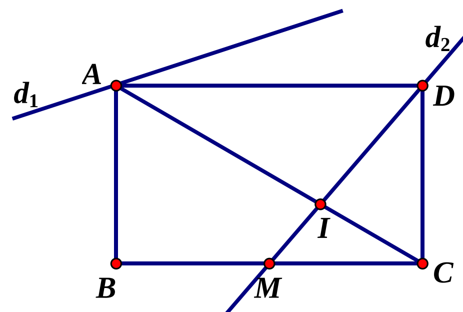
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(4t-20;\frac{14t-30}{3}\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(4t-16;\frac{14t-66}{3}\right)$

Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 17t^2-132t+243=0\Leftrightarrow t=3\vee t=\frac{81}{17}$

$\Rightarrow B(-3;-3)$ hoặc $B\left(\frac{69}{17};\frac{89}{17}\right)$ (loại). Vậy $B(-3;-3)$

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm A thuộc đường thẳng $d_1: x-y-4=0$, điểm $C(-7;5)$, đường thẳng đi qua D và trung điểm M của cạnh BC có phương trình $d_2: 4x-3y+23=0$. Xác định tọa độ các điểm A, B biết B có tung độ dương.

Giải



Pt tham số của $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t-4\end{cases}$. Gọi $A(t;t-4)\in d_1$, I là giao điểm của AC và d_2.

Ta có ΔIAD đồng dạng với $\Delta ICM\Rightarrow \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IC}\Rightarrow I\left(\frac{t-14}{3};\frac{t+6}{3}\right)$

Mà I thuộc d_2 nên ta có: $4\left(\frac{t-14}{3}\right)-3\left(\frac{t+6}{3}\right)+23=0$

$\Leftrightarrow t=5\Rightarrow A(5;1)$

Pt tham số $d_2:\begin{cases}x=-5+3m\\y=1+4m\end{cases}$

Gọi $M(-5+3m;1+4m)\in d_2$, M là trung điểm của BC $\Rightarrow B(6m-3;8m-3)$

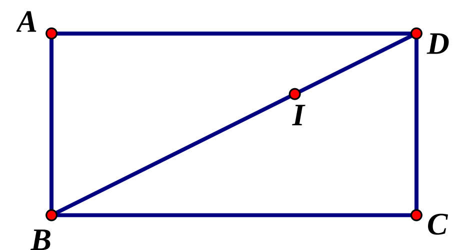
$\overrightarrow{CB}=(6m+4;8m-8)$, $\overrightarrow{AB}=(6m-8;8m-4)$

Mà $AB\perp CB\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{6}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(-3;-3)\text{ (loại)}\\B\left(\frac{21}{5};\frac{33}{5}\right)\end{array}\right.$

Vậy $A(5;1),B\left(\frac{21}{5};\frac{33}{5}\right)$

Bài 19. Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng AD: $2x+y-1=0$, điểm $I(-3;2)$ thuộc BD sao cho $\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{ID}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết điểm D có hoành độ dương và $AD=2AB$.

Giải



Ta có $d(I;AD)=\sqrt{5}\Rightarrow ID=5$ (do $AD=2AB$)

$\Rightarrow D\in(C):(x+3)^2+(y-2)^2=25$

Do đó tọa độ D là nghiệm của hệ:

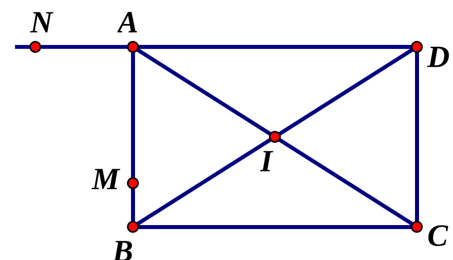
$\begin{cases}(x+3)^2+(y-2)^2=25\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=-1\\x=-3;y=7\end{array}\right.\Rightarrow D(1;-1)$ (vì D có hoành độ dương)

$\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{ID}\Rightarrow B(-11;8)$. Phương trình AB: $x-2y+27=0$; $A(-5;11)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(-5;-4)$

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có các đường thẳng AB, AD đi qua $M(2;3)$ và $N(-1;2)$. Viết phương trình các đường thẳng BC và CD biết tâm của hình chữ nhật là điểm $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $AC=\sqrt{26}$.

Giải



Gọi pt AB: $a(x-2)+b(y-3)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$ thì pt AD là $b(x+1)-a(y-2)=0$

$AD=2d(I;AB)=\frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $AB=2d(I;AD)=\frac{|7b+a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Từ $AC^2=AB^2+AD^2$ ta tính được $3a^2-ab-4b^2=0$ nên $a=-b$ hoặc $a=\frac{4b}{3}$

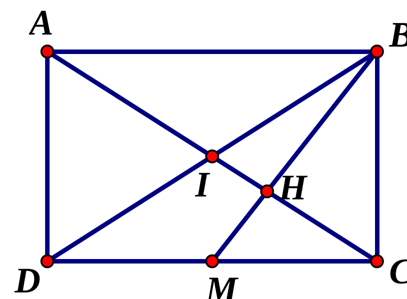
Với $a=-b$ ta được pt CD và BC lần lượt là $x-y-3=0$ và $x+y-7=0$

Với $a=\frac{4b}{3}$ ta được pt CD và BC lần lượt là $4x+3y-12=0$ và $3x-4y-14=0$

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB=AD\sqrt{2}$, tâm $I(1;-2)$. Gọi M là trung điểm cạnh CD, $H(2;-1)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BM. Tìm tọa độ các điểm A, B.

Giải

Từ giả thiết ta có H là trọng tâm ΔBCD. Suy ra $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{HI} \Rightarrow A(-2;-5)$



Ta có:

$$HB = \frac{2}{3}BM = \frac{BC\sqrt{6}}{3}; \ HC = \frac{1}{3}AC = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra $HB^2 + HC^2 = BC^2$. Vậy $BM \perp AC$

Suy ra BM đi qua $H(2;-1)$, nhận vtpt $\overrightarrow{IH} = (1;1) \Rightarrow$ pt BM: $x + y - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ B có dạng $B(t;1-t)$

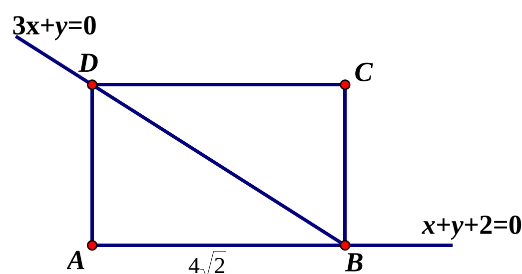
$$IB = IA \Leftrightarrow (t-1)^2 + (3-t)^2 = 18 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy $B\left(2+2\sqrt{2};-1-2\sqrt{2}\right)$ hoặc $B\left(2-2\sqrt{2};-1+2\sqrt{2}\right)$

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4\sqrt{2}$, điểm A có hoành độ âm. Đường thẳng AB có phương trình $x + y + 2 = 0$, đường thẳng BD có phương trình $3x + y = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh còn lại của hình chữ nhật.

Giải

Ta có: $B = AB \cap BD \Rightarrow B(1;-3)$



$A \in AB \Rightarrow A(t;-t-2), (t < 0)$

Ta có $BA = 4\sqrt{2}$

Với $t = 5$ loại vì $t < 0$.

Với $t = -3 \Rightarrow A(-3;1) \Rightarrow AD$ qua A và vuông góc với AB nên có phương trình:

$(x+3) - (y-1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$

Đường thẳng BC qua B và vuông góc với AB nên có phương trình:

$(x-1) - (y+3) = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$

$D = AD \cap BD \Rightarrow D(-1;3)$

Đường thẳng DC qua D và song song với AB nên có phương trình:

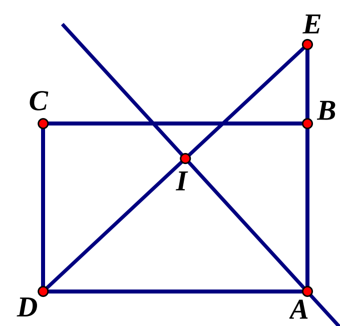
$(x+1) + (y-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

Vậy $BC: x - y - 4 = 0; \ DC: x + y - 2 = 0; \ AD: x - y + 4 = 0$

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 48, đỉnh $D(-3;2)$. Đường phân giác của góc BAD có phương trình $\Delta: x + y - 7 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh A có hoành độ dương.

Giải

Gọi E là điểm đối xứng của D qua Δ và $I = \Delta \cap DE$



Suy ra $E \in AB$ và I là trung điểm của DE.

Phương trình DE: $x - y + 5 = 0$

$\Rightarrow I(1;6) \Rightarrow E(5;10)$

Vì $A \in \Delta \Rightarrow A(a;7-a)$. Tam giác ADE cân tại A nên:

$$AE = \frac{DE}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a-5)^2 + (a+3)^2 = 64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -3 \end{array}\right.$$

Đỉnh A có hoành độ dương nên ta chọn $a=5\Rightarrow A(5;2)$

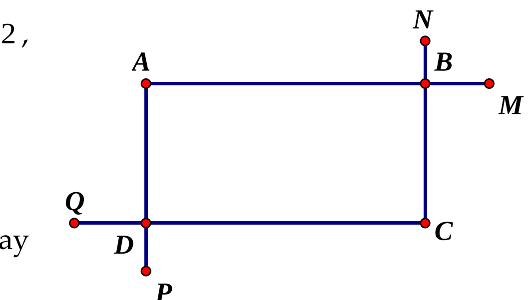
Đường thẳng AB đi qua $A(5;2)$ và $E(5;10)$ nên AB: $x=5\Rightarrow B(5;b)$

Ta có: $S_{ABCD}=48\Leftrightarrow AB.AD=48\Leftrightarrow 8.|b-2|=48\left[\begin{array}{l}b=8\\ b=-4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(5;8)\\ B(5;-4)\end{array}\right.$

Vì B, D nằm hai phía so với A nên ta chọn $B(5;8)$. Vậy $B(5;8)$.

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD. Biết rằng $AB=2BC$, $M\left(-\frac{4}{3};1\right)$ thuộc đường thẳng AB, $N(0;3)$ thuộc đường thẳng BC, $P\left(4;-\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AD, $Q(6;2)$ thuộc đường thẳng CD và đường thẳng AB có hệ số góc dương.

Giải



Phương trình AB có dạng: $y=k\left(x+\frac{4}{3}\right)+1$, DC: $y=k(x-6)+2$,

BC: $x+ky-3k=0$,

AD: $x+ky-4+\frac{k}{3}=0$

Vì $AB=2BC$ nên $d(AD,BC)=2d(AB,DC)$ hay $d(P,BC)=2d(M,DC)$

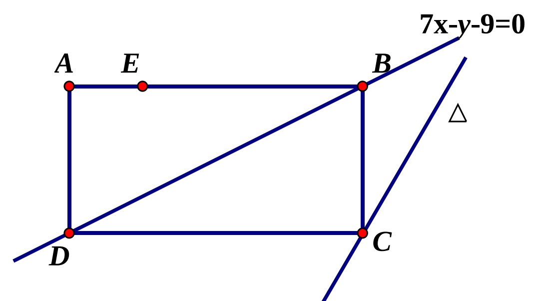
$$\frac{\left|4-\frac{k}{3}-3k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|-\frac{4}{3}k-1-6k+2\right|}{\sqrt{1+k^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10k-12=6-44k\\ 10k-12=44k-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\frac{1}{3}\\ k=-\frac{3}{17}\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

Với $k=\frac{1}{3}$ ta có phương trình các cạnh hình chữ nhật là AB: $y=\frac{1}{3}\left(x+\frac{4}{3}\right)+1$, $DC: y=\frac{1}{3}(x-6)+2$, $BC: x+\frac{1}{3}y-1=0$, $AD: x+\frac{1}{3}y-\frac{35}{9}=0$

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$, đường thẳng BD có phương trình là $7x-y-9=0$. Điểm $E(-1;2)$ thuộc cạnh AB sao cho $EB=3EA$. Biết rằng điểm B có tung độ dương. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C, D.

(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học – Huế, lần 3 – 2014)

Giải



$C\in\Delta: x-2y-1=0\Leftrightarrow C(2c+1;c)$

Ta có: $d(C;BD)=\frac{4}{3}d(E;BD)$

$$\Leftrightarrow\frac{|13c-2|}{\sqrt{50}}=\frac{4}{3}.\frac{|-18|}{\sqrt{50}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=2\\ c=-\frac{22}{13}\end{array}\right.$$

$c=2\Rightarrow C(5;2)$ (thỏa mãn vì C, E nằm khác phía đối với BD)

$c=-\frac{22}{13}\Rightarrow C\left(-\frac{31}{13};-\frac{22}{13}\right)$ (loại vì C, E nằm cùng phía đối với BD)

$B\in BD: 7x-y-9=0\Rightarrow B(b;7b-9)$

Ta có:

$\widehat{EBC}=90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (-1-b)(5-b)+(11-7b)(11-7b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=\dfrac{29}{25}\end{array}\right.$

$b=2 \Rightarrow B(2;5)$ (thỏa mãn điều kiện $y_B>0$)

$b=\dfrac{29}{25} \Rightarrow B\left(\dfrac{29}{25};-\dfrac{22}{25}\right)$ (loại)

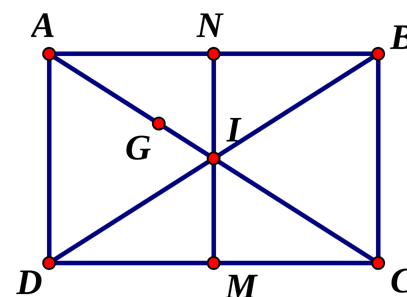
$\overrightarrow{BA}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A-2=\dfrac{4}{3}(-1-2) \\ y_A-5=\dfrac{4}{3}(2-5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-2 \\ y_A=1\end{cases}$. Vậy $A(-2;1)$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-5=-4 \\ y_D-2=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=-2\end{cases}$. Vậy $D(1;-2)$

Vậy $A(-2;1)$, $B(2;5)$, $C(5;2)$ và $D(1;-2)$

Bài 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $A(3;-4)$, trọng tâm tam giác ABD thuộc đường thẳng có phương trình $x+3y+4=0$ và $M\left(-\dfrac{25}{2};5\right)$ là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa độ điểm B.

Giải



Gọi G là trọng tâm ΔABD, suy ra $G(-4-3t;t)$

I là tâm hình chữ nhật ABCD, suy ra $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow I\left(-\dfrac{15+9t}{2};\dfrac{4+3t}{2}\right)$

N là trung điểm AB, suy ra I là trung điểm MN. Từ đó $N\left(-\dfrac{5+18t}{2};-1+3t\right)$

ABCD là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{IN}=0$

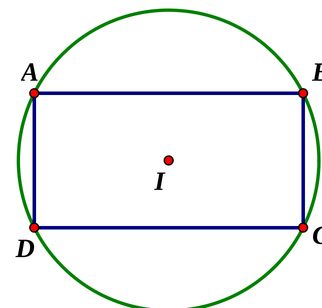
$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{11+18t}{2}\right)\left(\dfrac{10-9t}{2}\right)+(3+3t)\left(\dfrac{-6+3t}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 180t^2-99t-146=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{73}{60}\end{array}\right.$

TH1: Với $t=-\dfrac{2}{3}$ ta được $N\left(\dfrac{7}{2};-3\right)$. Suy ra $B(4;-2)$

TH2: Với $t=\dfrac{73}{60}$ ta được $N\left(-\dfrac{269}{20};\dfrac{53}{20}\right)$. Suy ra $B\left(-\dfrac{299}{10};\dfrac{93}{10}\right)$

Bài 27. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB=2AD$ nội tiếp trong đường tròn (C), tâm $I(2;-2)$. Lập phương trình đường tròn (C) và tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết rằng cạnh AD nằm trên đường thẳng: $x-3y+2=0$ và A có hoành độ âm.

Giải



Khoảng cách $d(I;AD)=\sqrt{10}$, $AB=2\sqrt{10}$, $AB=2AD \Rightarrow AD=\sqrt{10}$

Đường chéo $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=5\sqrt{2}$

Bán kính của (C): $R=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Phương trình của (C): $(x-2)^2+(y+2)^2=\frac{25}{2}$

Tọa độ A, D là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=\frac{25}{2}\\ x-3y+2=0\end{cases}$

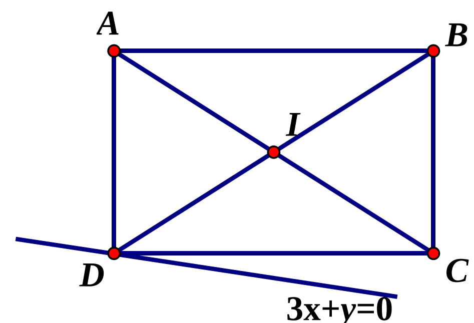
$A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), D\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)\ (x_A<0)$

B, C đối xứng với D, A qua I nên $B\left(\frac{3}{2};-\frac{11}{2}\right), C\left(\frac{9}{2};-\frac{9}{2}\right)$

Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{15}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và đỉnh $A(6;5)$, đỉnh D thuộc đường thẳng $3x+y=0$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Giải

Theo công thức trung điểm vì I là trung điểm AC suy ra tọa độ $C(9;-8)$



Vì D thuộc đường thẳng $3x+y=0$ nên $D(t;-3t)$. Mặt khác do $AD\perp DC$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=0$

$\Leftrightarrow (t-6)(9-t)+(-3t-5)(-8+3t)=0$

$\Leftrightarrow 5t^2-12t+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{7}{5}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=1 \Rightarrow D(1;-3)$. Vì I là trung điểm BD nên $B(14;0)$

Phương trình các cạnh là $AB:5x+8y-70=0$, $BC:8x-5y-112=0$, $CD:5x+8y+19=0$, $AD:8x-5y-23=0$

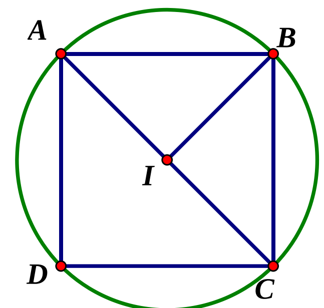
Trường hợp 2: $t=\frac{7}{5}\Rightarrow D\left(\frac{7}{5};-\frac{21}{5}\right)$. Vì I là trung điểm BD nên $B\left(\frac{68}{5};\frac{6}{5}\right)$

Phương trình các cạnh là AB: $x+2y-16=0$, $BC:-2x+y+26=0$, $DC:x+2y+7=0$, $AD:-2x+y+7=0$.

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y=0$ và điểm $A(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong (C) và có diện tích bằng 10.

Giải

Từ pt (C) suy ra tọa độ tâm $I(1;2)$, $R=\sqrt{5}$. Điểm C đối xứng với A qua I suy ra $C(3;1)$. $S_{ABCD}=2S_{ACB}=AC.BH=10$ (H là chân đường cao kẻ từ B xuống AC)



Ta có $AC=2\sqrt{5}\Rightarrow BH=\sqrt{5}$. Vậy H trùng với tâm I của đường tròn và ABCD là hình vuông.

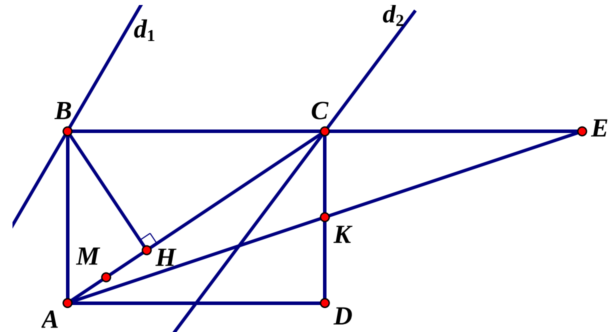
Phương trình đường thẳng d qua tâm I và nhận $\overrightarrow{AC}=(4;-2)$ làm vec-tơ pháp tuyến có dạng: $2x+y=0$. Tọa độ của B, D là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0\\ 2x-y=0\end{cases}$

Giải hệ trên ta có: $B(0;0)$, $D(2;4)$

Bài 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD, đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1: 2x-y+2=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d_2: x-y-5=0$. Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC. Biết $M\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$, $K(9;2)$ lần lượt là trung điểm của AH và CD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hoành độ đỉnh C lớn hơn A.

Giải



Gọi $B(b;2b+2), C(c;c-5)$ $(c>4)$ và E là điểm đối xứng với B qua C. Suy ra $E(2c-b;2c-2b-12)$. Dễ dàng chứng minh được K là trung điểm của AE. Do đó:

$\overrightarrow{HE}=2\overrightarrow{MK}=\left(\frac{72}{5};\frac{16}{5}\right)$

$\Rightarrow H\left(2c-b-\frac{72}{5};2c-2b-\frac{76}{5}\right)$

Thiết lập tọa độ các vec-tơ:

$\overrightarrow{CK}=(9-c;7+c)$, $\overrightarrow{BC}=(c-b;c-2b-7)$, $\overrightarrow{BH}=\left(2c-2b-\frac{72}{5};2c-4b-\frac{86}{5}\right)$, $\overrightarrow{MC}=\left(c-\frac{9}{5};c-\frac{27}{5}\right)$

Với giả thiết bài toán ta có hệ phương trình:

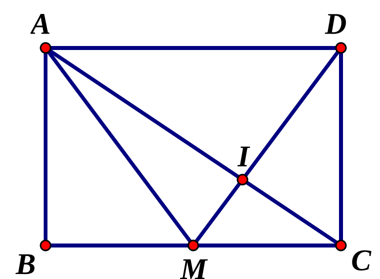
$$\begin{cases}\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{MC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2c^2+3bc+23c-23b-49=0\\ 4c^2-6bc+\frac{126}{5}b-46c+\frac{594}{5}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ c=9 \text{ hoặc } c=4 \text{ (loại)}\end{cases}$$

Từ đó ta có $B(1;4), C(9;4)$. Vì K là trung điểm của CD nên suy ra $D(9;0)$.

Lại có C là trung điểm của BE nên suy ra $E(17;4)$ và K là trung điểm của AE nên suy ra $A(1;0)$.

Bài 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm $C(5;-7)$, A thuộc đường thẳng $(d_1): x-y+4=0$, đường thẳng đi qua điểm D và trung điểm của BC có phương trình $(d_2): 3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ các điểm A và B, biết A có hoành độ dương.

Giải



$A\in d_1$ nên $A(a;4+a)$

Cách 1: Ta có:

$S_{ABM}=S_{CDM}=\frac{1}{4}S_{ABCD}\Rightarrow S_{AMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{AMD}=2S_{CMD}\Rightarrow d(A;d_2)=2d(C;d_2)$

$\Leftrightarrow |a+39|=40\Leftrightarrow a=1$ (nhận) hoặc $a=-79$ (loại vì khi đó A, C nằm cùng phía đối với d_2). Vậy $A(1;5)$

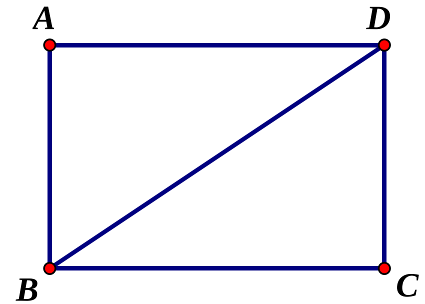
Cách 2: Gọi $I=AC\cap d_2$. Khi đó theo định lý Thales:

$$\frac{IC}{IA}=\frac{MC}{AD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\frac{x_A+2x_C}{3}=\frac{a+10}{3}\\ y_I=\frac{y_A+2y_C}{3}=\frac{a-10}{3}\end{cases}$$

Mà $I\in d_2$ nên $\frac{3(a+10)}{3}-\frac{4(a-10)}{3}-23=0\Leftrightarrow a=1$. Vậy $A(1;5)$

Bài 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 22, biết rằng các đường thẳng AB, BD lần lượt có phương trình là $3x+4y+1=0$ và $2x-y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

Giải



Tọa độ $B=AB\cap BD$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x+4y+1=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow B(1;-1)$

$S_{ABCD}=AB.AD=12$

Ta có:

$$\cos ABD=\frac{|3.2-4.1|}{\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow \tan ABD=\frac{11}{2}=\frac{AD}{AB}\quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $AD=11,\ AB=2\quad (3)$

Vì $D\in BD\Rightarrow D(x;-2x+3)$. Ta có: $AD=d(D;AB)=\frac{|11x-11|}{5}\qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $|11x-11|=55\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-4\end{array}\right.$

Với $x=6\Rightarrow D(6;9)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB là $4x-3y+3=0$

$\Rightarrow A=AD\cap AB\Rightarrow A=\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)\Rightarrow C\left(\frac{38}{5};\frac{39}{5}\right)$

Với $x=-4\Rightarrow D(-4;-11)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB là: $4x-3y-17=0$

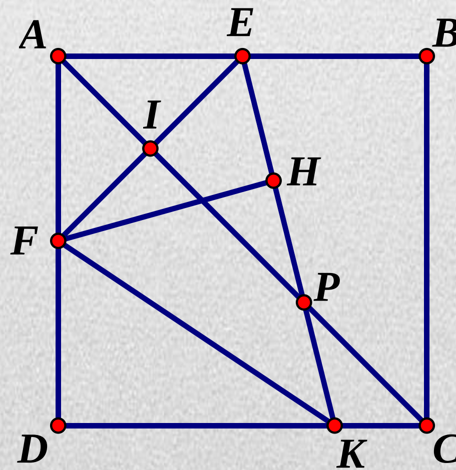
$\Rightarrow A=AD\cap AB\Rightarrow A\left(\frac{13}{5};-\frac{11}{5}\right)\Rightarrow C\left(-\frac{28}{5};-\frac{49}{5}\right)$

TRẦN ĐÌNH CƯ
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

Bẻ gãy Oxy

Chủ đề 5: Hình vuông

Tài liệu thân tặng các em học sinh 12, chuẩn bị kỳ thi Tốt Nghiệp THPT Quốc gia 2016. Chúc các em đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến.



Huế, Ngày 19/05/2016

CHỦ ĐỀ 5. HÌNH VUÔNG

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Giả sử đường thẳng CN có phương trình $x + 2y - 11 = 0$ và điểm $M\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ điểm C.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên CN, ta có: $MH = d(M, CN) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Xét tam giác CMN có $\cos NCM = \frac{CN^2 + CM^2 - MN^2}{2CN.CM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow NCM = 45^0$. Từ đó suy ra $MC = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Do C thuộc đường thẳng CN nên $C(11-2c;c)$, từ $MC = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$\Leftrightarrow 5c^2 - 35c + 50 = 0$

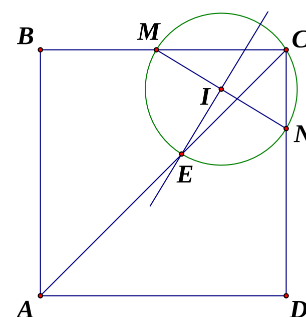
Tìm được $C(7;2)$, $C(1;5)$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(2;2)$. Biết điểm $M(6;3)$ thuộc cạnh BC, điểm $N(4;6)$ thuộc cạnh CD. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

Gọi $I\left(5;\frac{9}{2}\right)$ là trung điểm của MN. Do $MCN = 90^0$ nên C thuộc đường tròn tâm I đường kính MN.

Vì CA là phân giác của góc MCN nên CA giao với đường tròn tại điểm E là điểm chính giữa MN không chứa C (A và E nằm cùng phía so với MN). Suy ra E là giao điểm của đường tròn (I) và trung trực của MN.



Phương trình đường tròn $(I): (x-5)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

Phương trình đường trung trực của MN: $2x - 3y + \frac{7}{2} = 0$

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x-5)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \\ 2x - 3y + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$

Ta có $E_1\left(\frac{13}{2};\frac{11}{2}\right)$, $E_2\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$. Vì A, E cùng phía so với MN nên chọn $E\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$

Phương trình $AE: x - y = 0$. Do C là giao điểm thứ hai của (I) và AE nên tọa độ $C(6;6)$

Cách khác.

Gọi vec-tơ pháp tuyến của BC là $\vec{n} = (a;b)$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ pt $BC: ax + by - 6a - 3b = 0$

CD đi qua $N(4;6)$ và vuông góc với NC suy ra pt CD: $bx - ay + 6a - 4b = 0$

Ta có:

$d(A;BC) = d(A;CD) \Leftrightarrow \frac{|4a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |4a+b| = |4a-2b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 8a - b = 0 \end{array}\right.$

- Nếu $b=0$ chọn $a=1$. Khi đó pt BC: $x-6=0$ và pt CD: $y-6=0$

$C=BC\cap CD\Rightarrow C(6;6)$. Phương trình MN: $3x+2y-24=0$. Kiểm tra A và C khác phía đối với đường thẳng MN nên $C(6;6)$ thỏa mãn bài toán.

- Nếu $8a-b=0$ chọn $a=1, b=8$. Khi đó pt BC: $x+8y-30=0$ và pt CD: $8x-y-26=0$. Suy ra $C\left(\frac{238}{65};\frac{214}{65}\right)$ loại do A và C cùng phía đối với đường thẳng MN. Vậy điểm C cần tìm là $C(6;6)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Biết điểm A có tung độ dương, đường thẳng AB có phương trình $3x+4y-18=0$, điểm $M\left(\frac{21}{4};-1\right)$ thuộc cạnh BC, đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại N thỏa mãn $BM.DN=25$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

Giải

Đường thẳng BC qua M và vuông góc với AB nên $BC: 4x-3y-24=0$. Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}4x-3y-24=0\\3x+4y-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=0\end{cases}\Rightarrow B(6;0)$$

Ta thấy các tam giác sau đồng dạng với nhau: ΔMBA, ΔMCN và ΔADN

Suy ra

$$\frac{MB}{AB}=\frac{MC}{NC}=\frac{AD}{ND}\Rightarrow MB.ND=AB.AD$$

Suy ra $25=AB^2$ hay cạnh hình vuông bằng 5.

Gọi $A(4a+6;-3a)\in AB$, khi đó $25=AB^2\Leftrightarrow 16a^2+9a^2=25\Rightarrow a=\pm1$

Vì điểm A có tung độ dương nên $A(2;3)$

Phương trình đường thẳng CD có dạng $3x+4y+m=0$ $(m\neq-18)$

Vì cạnh hình vuông bằng 5 nên $d(B;CD)=\frac{|18+m|}{5}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=-43\end{array}\right.$

- Với $m=7$, pt CD: $3x+4y+7=0$, khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}4x-3y-24=0\\3x+4y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}\Rightarrow C(3;-4) \text{ (thỏa vì } MC<5\text{)}$$

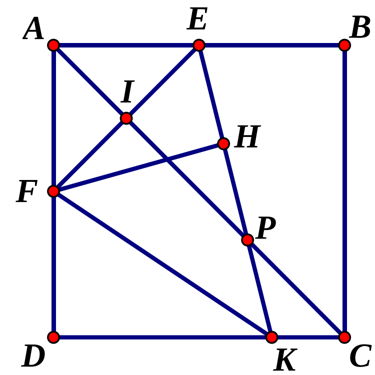
Suy ra $D(-1;-1)$

- Với $m=-43$, pt CD: $3x+4y-43=0$, khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}4x-3y-24=0\\3x+4y-43=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=4\end{cases}\Rightarrow C(9;4) \text{ (không thỏa vì } MC>5\text{)}$$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm $F\left(\frac{11}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh AD. Đường thẳng EK có phương trình $19x-8y-18=0$ với E là trung điểm của cạnh AB, điểm K thuộc cạnh DC và $KD=3KC$. Tìm tọa độ điểm C của hình vuông ABCD biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

Giải



Gọi $AB = a\ (a > 0) \Rightarrow S_{\Delta EFK} = S_{ABCD} - S_{\Delta AEF} - S_{\Delta FDK} - S_{KCBE} = \frac{5a^2}{16}$

$S_{\Delta EFK} = \frac{1}{2}FH.EK,\ FH = d(F;EK) = \frac{25}{2\sqrt{17}};\ EK = \frac{a\sqrt{17}}{4} \Rightarrow a = 5$

ABCD là hình vuông cạnh bằng 5 $\Rightarrow EF = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Tọa độ E là nghiệm:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{2} \\ 19x - 8y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{58}{17} \end{array}\right. \text{(loại)} \\ y = ^5 2 \end{cases} \Rightarrow E\left(2; \frac{5}{2}\right)$$

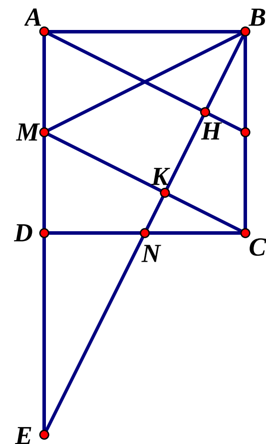
AC qua trung điểm I của EF và $AC \perp EF \Rightarrow AC: 7x + y - 29 = 0$

Ta có: $AC \cap EK = \{P\} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y - 29 = 0 \\ 19x - 8y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)$

Ta xác định được $\overrightarrow{IC} = \frac{9}{5}\overrightarrow{IP} \Rightarrow C(3;8)$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và DC; K là giao điểm của BN với CM. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK, biết BN có phương trình $2x + y - 8 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Giải



Gọi $E = BN \cap AD \Rightarrow D$ là trung điểm của AE

Dựng $AH \perp BN$ tại H $\Rightarrow AH = d(A;BN) = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Trong tam giác vuông ABE:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{5}{4AB^2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5}.AH}{2} = 4$

$B \in BN \Rightarrow B(b;8-2b)\ (b > 2)$

$AB = 4 \Rightarrow B(3;2)$

Phương trình AE: $x + 1 = 0$

$E = AE \cap BN \Rightarrow E(-1;10) \Rightarrow D(-1;6) \Rightarrow M(-1;4)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BKM $\Rightarrow$ I là trung điểm của BM $\Rightarrow I(1;3)$

$R = \frac{BM}{2} = \sqrt{5}$. Vậy phương trình đường tròn: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

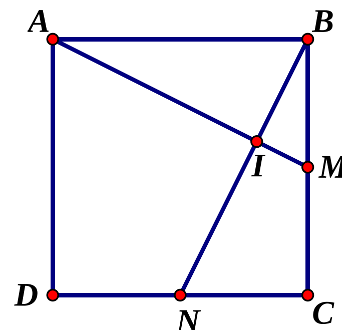
Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Tìm tọa độ đỉnh B, điểm M biết $N(0;-2)$, đường thẳng AM có phương trình $x + 2y - 2 = 0$ và cạnh hình vuông bằng 4.

Giải

Gọi $I = AM \cap BN$. ΔBIM đồng dạng ΔABM suy ra $AM \perp BN$ nên $BN: 2x - y + c = 0$.

$N(0;-2)\Rightarrow c=-2\Rightarrow BN:2x-y-2=0$.Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y-2=0\\2x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{2}{5}\right)$$



Từ ΔABM vuông: $BI=\dfrac{AB.BM}{\sqrt{AB^2+BM^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Tọa độ điểm $B(x;y)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases}B\in BN\\BI=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y-2=0\\\left(\dfrac{6}{5}-x\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}-y\right)^2=\dfrac{16}{5}\end{cases}$$

Giải hệ ta được $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ và $\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=-\dfrac{6}{5}\end{cases}$. Suy ra $B(2;2)$ (loại $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{6}{5}\right)$)

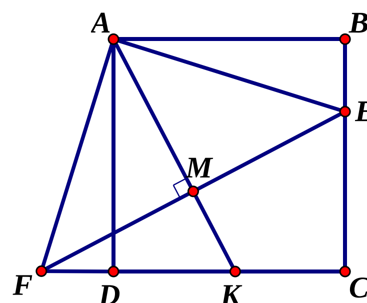
Tọa độ điểm $M(x;y)$ thỏa mãn: $\begin{cases}M\in AM\\IM=\sqrt{BM^2-BI^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-2=0\\\left(x-\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ và $\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$. Suy ra $M_1(2;0)$, $M_2\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{4}{5}\right)$.

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD và điểm E thuộc cạnh BC. Một đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt CD tại F. Đường thẳng chứa đường trung tuyến AM của tam giác AEF cắt CD tại K. Tìm tọa độ điểm D biết $A(-6;6)$, $M(-4;2)$, $K(-3;0)$.

Giải

Ta có hai tam giác vuông $\Delta ABE=\Delta ADF$ vì $AB=AD$ và $BAE=DAF$ (cùng phụ với góc DAE).



Suy ra ΔAEF vuông cân và $ME=MA=MF\Rightarrow AM\perp EF$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2;-4)$. Đường thẳng EF đi qua M có phương trình:

$2(x+4)-4(y-2)=0\Leftrightarrow x-2y+8=0$

Bây giờ ta tìm tọa độ các điểm E, F thỏa mãn $ME=MA=MF$.

Gọi $T(x;y)$ thuộc đường thẳng EF, thì $x=2t-8;y=t$ $(t\in\mathbb{R})$

Khi đó $MT=MA\Leftrightarrow(2t-8+4)^2+(t-2)^2=2^2+(-4)^2=20$

$$\Leftrightarrow5(t-2)^2=20\Leftrightarrow t(t-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=4\end{array}\right.$$

Như vậy, có hai điểm $T_1(-8;0)$ và $T_2(0;4)$ (chính là hai điểm E và F) thuộc đường thẳng EF mà $MT_1=MA$.

Trường hợp $E(-8;0)$, $F(0;4)$.

Do F thuộc đường thẳng CD nên CD nhận $\overrightarrow{KF}=(3;4)$ làm vec-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng CD là: $\begin{cases} x=3t \\ y=4+4t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Khi đó $D(3t;4+4t)$.

Ta có:

$AD\perp KF \Leftrightarrow \overrightarrow{KF}.\overrightarrow{AD}=0 \Leftrightarrow 3(3t+6)+4(-2+4t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{5}\Rightarrow D\left(-\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$

Trường hợp $F(-8;0)$, $E(0;4)$

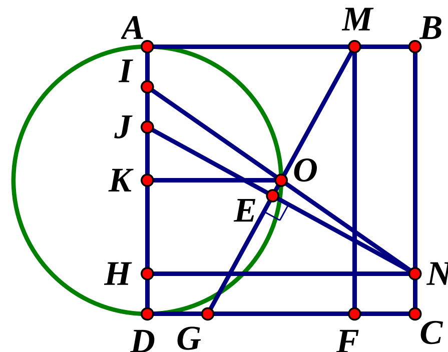
Đường thẳng CD nhận $\overrightarrow{FK}=(5;0)$ làm vec-tơ chỉ phương.

Phương trình CD: $\begin{cases} x=-8+5t \\ y=0 \end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Khi đó $D(-8+5t;0)$

Ta có $AD\perp KF \Leftrightarrow \overrightarrow{KF}.\overrightarrow{AD}=0 \Leftrightarrow 5(-2+5t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{5}\Rightarrow D(-6;0)$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $O\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$. Điểm $M(6;6)$ thuộc cạnh AB và $N(8;-2)$ thuộc cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Giải



Gọi G là điểm đối xứng của M qua O $\Rightarrow G(1;-3)\in CD$

Gọi I là điểm đối xứng của N qua O $\Rightarrow I(-1;5)\in AD$

Phương trình cạnh MO qua M và có VTCP $\overrightarrow{MO}$ là: $9x-5y-24=0$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh NE qua N và vuông góc với MO là: $5x+9y-22=0$

Gọi E là hình chiếu của N trên MG $\Rightarrow E=NE\cap MG\Rightarrow E\left(\frac{163}{53};\frac{39}{53}\right)$

Lại có $NE\perp MG\Rightarrow \begin{cases} NJ=MG \\ \overrightarrow{NE}=k\overrightarrow{NJ} \end{cases}(k\neq 0, k\in\mathbb{R})\Rightarrow J(-1;3)$ (vì $\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NJ}$ cùng chiều)

Suy ra phương tình cạnh AD: $x+1=0\Rightarrow OK=\frac{9}{2}$. Vì $KA=KO=KD$ nên A, O, D thuộc đường tròn tâm K đường kính OK.

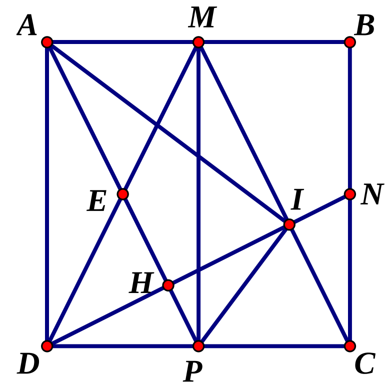
Đường tròn tâm K đường kính OK có phương trình: $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$

Vậy tọa độ điểm A và D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4} \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Suy ra $A(-1;6)$, $D(-1;-3)\Rightarrow C(8;-3)$, $B(8;6)$. Trường hợp $D(-1;6)$, $A(-1;-3)$ loại do M thuộc CD.

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC, biết CM cắt DN tại $I\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5}\right)$. Gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P\left(\frac{7}{2};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết hoành độ điểm A nhỏ hơn 4.

Giải



Ta có $\Delta MBD = \Delta NCD$ do đó $CM \perp DN$. Vì $AH \perp DN$ nên AMCP là hình bình hành và P là trung điểm CD và góc $AIP = 90^0$.

Đường thẳng AI vuông góc với PI qua I có dạng: $3x + 4y - 22 = 0$.

Gọi $A(2-4t;4+3t) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(-4t - \frac{12}{5};3t + \frac{9}{5}\right)$

$AI = 2PI \Leftrightarrow \left(4t + \frac{12}{5}\right)^2 + \left(3t + \frac{9}{5}\right)^2 = 9$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = -\frac{6}{5}$

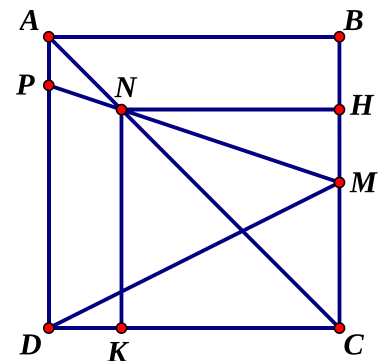
Nếu $t = -\frac{6}{5}$ thì $A\left(\frac{34}{5};\frac{2}{5}\right)$ (loại). Nếu $t = 0$ thì $A(2;4)$.

Đường thẳng $AP: 2x + y - 8 = 0$, $DN \perp AP$ và đi qua I có dạng $x - 2y = 0$. Ta có $DN \cap AP = H\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow D(2;1) \Rightarrow C(5;1) \Rightarrow B(5;4)$

Vậy $A(2;4)$, $B(5;4)$, $C(5;1)$, $D(2;1)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của cạnh BC, N thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{2}AC$. Biết MN có phương trình $3x - y - 4 = 0$ và $D(5;1)$. Tìm tọa độ của điểm B biết M có tung độ dương.

Giải



Kẻ $NH \perp BC$ tại H, $NK \perp DC$ tại K.

Ta có $\Delta NKC = \Delta NHC \Rightarrow NK = NH$

$$\left.\begin{array}{l} AD//NK \Rightarrow \frac{DK}{DC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \\ AB//NH \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow DK = BH$$

Mà M là trung điểm BC nên H là trung điểm BM $\Rightarrow \Delta DKN = \Delta MHN$

$\Rightarrow DNK = MNH$, $ND = NM$.

Mà $KNH = 90^0 \Rightarrow DNK = 90^0 \Rightarrow \Delta DNM$ vuông cân tại N

$\Rightarrow DN \perp MN \Rightarrow DN: (x-5) + 3(y-1) = 0$ hay $x + 3y - 8 = 0$.

Tọa độ N thỏa hệ: $\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(2;2)$

Giả sử $M(m;3m-4) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2-m;6-3m)$; $DN = \sqrt{10}$; $MN = DN$

$\Rightarrow (2-m)^2+(6-3m)^2=10 \Leftrightarrow (m-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \Rightarrow M(3;5) \\ m=1 \Rightarrow M(1;-1) \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$M(3;5)$. Gọi $P=MN\cap AD \Rightarrow \overrightarrow{NP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P-2=-\frac{1}{3} \\ y_P-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P=\frac{5}{3} \\ y_P=1 \end{cases}$

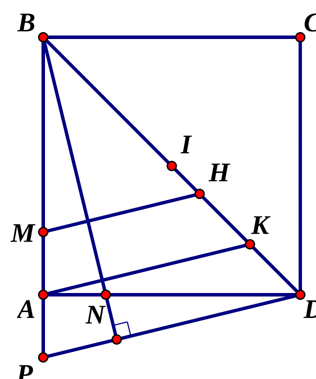
Ta có $AP=\frac{1}{3}MC=\frac{1}{6}BC=\frac{1}{6}AD \Rightarrow DP=\frac{5}{6}DA$

$\Rightarrow \overrightarrow{DP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DA}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{DP} \Rightarrow \begin{cases} x_B-3=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}-5\right) \\ y_B-5=\frac{3}{5}(1-1) \end{cases} \Rightarrow B(1;5)$

Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: 5x+3y+13=0$. M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, AD sao cho $AM=AN$. Các đường thẳng lần lượt qua A và M vuông góc với BN, cắt BD tại $K\left(\frac{6}{5};-\frac{2}{3}\right)$ và $H\left(\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right)$. Cho biết đỉnh A có hoành độ và tung độ âm, tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(Trích Trường THPT Chuyên Quốc Học, Huế lần 2 – 2015)

Giải



Đường thẳng BD có phương trình $5x+3y-4=0$. Một vec-tơ chỉ phương của BD là $\vec{u}=(-3;5)$.

Theo giả thiết $A\in d: \begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1-5t \end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{DA}=(-4+3t;1-5t)$

Góc giữa hai đường thẳng DA và DB bằng 45^0 khi và chỉ khi:

$\frac{|17(2t-1)|}{\sqrt{34}\sqrt{(3t-4)^2+(5t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$

Theo giả thiết thì $A(-2;-1)$.

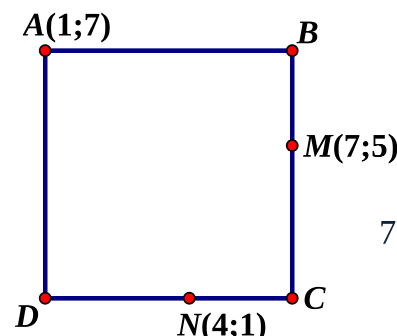
Đường thẳng qua A và vuông góc với BD có phương trình $-3x+5y-1=0$. Gọi I là tâm của hình vuông thì tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x+3y-4=0 \\ -3x+5y-1=0 \end{cases}$

Nên $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, suy ra $B(-1;3)$, $C(3;2)$.

Vậy $A(-2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$, $D(2;-2)$

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(1;7)$, điểm $M(7;5)$ thuộc đoạn BC, điểm $N(4;1)$ thuộc đoạn CD. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD.

Giải



Gọi AB: $a(x-1)+b(y-7)=0$ (vtpt $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$, $a^2+b^2>0$)

$\Rightarrow AD: b(x-1)-a(y-7)=0$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow d(N;AB)=d(M;AD)$

$\Leftrightarrow \frac{|3a-6b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|6b+2a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0,\ b\neq 0 \\ a=12b \end{array}\right.$

TH1: $a=0,\ b\neq 0$

AB: $y=7$; BC: $x=7$; CD: $y=1$; AD: $x=1$

$\Rightarrow B(7;7),\ C(1;7),\ D(1;1)$

TH2: $a=12b,\ b\neq 0$

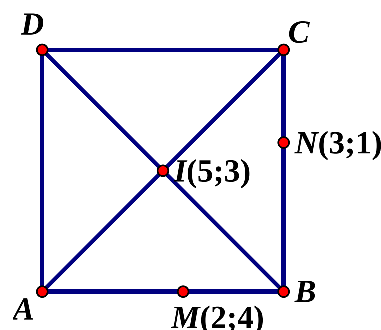
AB: $12x+y=19$; BC: $x-12y+53=0$

$\Rightarrow B\left(\frac{35}{29};\frac{131}{29}\right)$; $AB=\frac{6\sqrt{145}}{29}<\frac{14\sqrt{145}}{29}=BM$ (vô lý)

Vậy $B(7;7)$, $C(1;7)$, $D(1;1)$

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I(5;3)$. Tìm tọa độ của điểm D biết rằng đường thẳng AB đi qua điểm $M(2;4)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(3;1)$

Giải



Gọi $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$. Phương trình đường thẳng AB là $a(x-2)+b(y-4)=0$

Ta có $BC\perp AB\Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$. Phương trình đường thẳng BC là $b(x-3)-a(y-1)=0$

Vì I là tâm của hình vuông ABCD nên ta có $d(I;AB)=d(I;BC)$

$\Leftrightarrow \frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2b-2a|}{\sqrt{b^2+a^2}}$

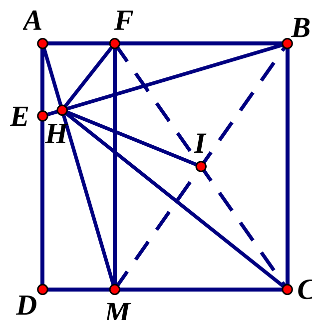
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b=2a-2b \\ 3a-b=2b-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ 5a=3b \end{array}\right.$

TH1: $a=-b$. Phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là $x-y+2=0$, $x+y-4=0$. Suy ra $B(1;3)$. D đối xứng với B qua I nên $D(9;3)$

TH2: $5a=3b$. Phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là $3x+5y-26=0$, $5x-3y-12=0$. Suy ra $B\left(\frac{69}{17};\frac{47}{17}\right)\Rightarrow D\left(\frac{101}{17};\frac{55}{17}\right)$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AD, AB lấy hai điểm E và F sao cho $AE=AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BE. Tìm tọa độ của C biết C thuộc đường thẳng $d: x-2y+1=0$ và tọa độ $F(2;0)$, $H(1;-1)$.

Giải



Gọi M là giao điểm của AH và CD. Ta có hai tam giác ABE và ADM bằng nhau (vì $AB=AD$, $ABE=DAM$, do cùng phụ với AEH). Do đó $DM=AE=AF$, suy ra BCMF là hình chữ nhật.

Gọi I là tâm hình chữ nhật BCMF. Trong tam giác vuông MHB ta có: $HM=\frac{1}{2}BM$

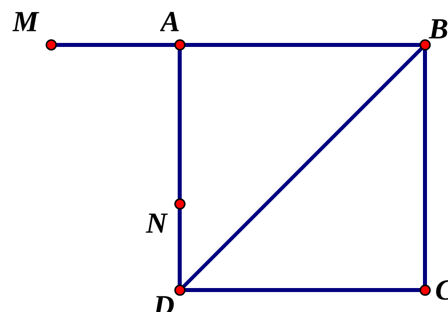
Do $BM=CF$ nên $HM=\frac{1}{2}CF$, suy ra tam giác CHF vuông tại H.

Gọi tọa độ $C(2c-1;c)$, ta có: $\overrightarrow{HC}=(2c-2;c+1)$, $\overrightarrow{HF}=(1;1)$

Vì $CH\perp FH$ nên $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HF}=0\Leftrightarrow 2c-2+c+1=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$. Vậy tọa độ $C\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD và $BD:-2x+y+2=0$, hai đường thẳng AB, AD lần lượt đi qua $M(-3;2)$, $N(-1;6)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B. Biết đỉnh B có hoành độ dương.

Giải



Ta có $d(M;BD)=2\sqrt{5}\Rightarrow MB=2\sqrt{10}$

$B\in BD\Leftrightarrow B(b;2b-2)$; $MB^2=40$

$\Leftrightarrow 5b^2-10b-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1\text{ (kth)}\\ b=3\text{ (th)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow B(3;4)$

AD đi qua $N(-1;6)$ có VTPT $\overrightarrow{BM}=(-6;-2)$ hoặc $\vec{n}'=(3;1)$

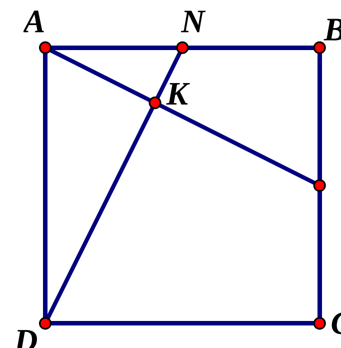
$\Rightarrow AC:3x+y-3=0$

AB qua $M(-3;2)$ có VTPT $\vec{n}=(-1;3)\Rightarrow AB:-x+3y-9=0$

Tọa độ A: $\begin{cases}-x+3y=9\\ 3x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}$. Vậy $A(0;3)$

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(1;1)$, $AB=4$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, $K\left(\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của D lên AM. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông, biết $x_B<2$.

Giải



Gọi N là giao điểm của DK và AB. Khi đó $\Delta DAN=\Delta ABM\Rightarrow AN=BM\Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AB. Ta có $\overrightarrow{AK}=\left(\frac{4}{5};-\frac{8}{5}\right)$, phương trình AM: $2x+y-3=0$, DK: $x-2y-3=0$.

Vì $N\in DK\Rightarrow N(2n+3;n)\Rightarrow\overrightarrow{AN}=(2n+2;n-1)$

Mà $AN=\frac{1}{2}AB=2\Rightarrow AN^2=4$

$\Leftrightarrow(2n+2)^2+(n-1)^2=4\Leftrightarrow 5n^2+6n+1=0$

$\Leftrightarrow n=-1;n=-\frac{1}{5}$

Với $n=-\frac{1}{5}\Rightarrow x_B=2x_N-x_A=\frac{21}{5}>2$ (loại)

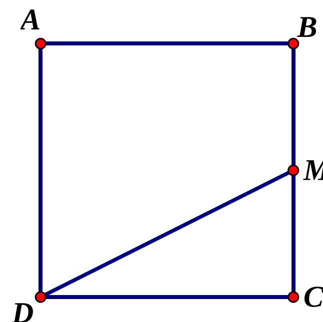
Với $n=-1\Rightarrow x_B=1<2$, $y_B=-3\Rightarrow B(1;-3)$

Phương trình BC: $y=-3\Rightarrow C(5;-3)$

Phương trình CD: $x=5\Rightarrow D(5;1)$

Bài 17. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường thẳng DM: $x-y-2=0$ và $C(3;-3)$. Biết đỉnh A thuộc đường thẳng d: $3x+y-2=0$, xác định tọa độ các đỉnh A, B, D.

Giải



Gọi $A(t;2-3t)$, từ tính chất của hình vuông ta có:

$d(A;DM)=2d(C;DM)\Leftrightarrow \frac{|4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{2.4}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow t=-1\vee t=3\Rightarrow A(3;-7)\vee A(-1;5)$

Mặt khác A, C nằm về hai phía đối với đường thẳng DM nên chỉ có $A(-1;5)$ thỏa mãn.

Gọi $D(d;d-2)$ thuộc DM, ta có $\overrightarrow{AD}=(d+1;d=7)$, $\overrightarrow{CD}=(d-3;d+1)$

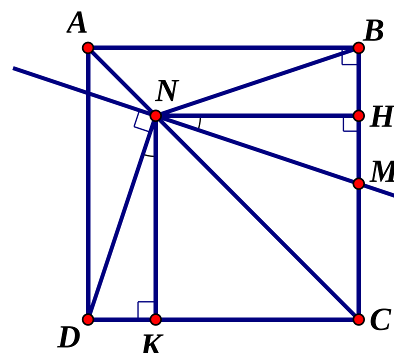
ABCD là hình vuông nên $\begin{cases}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0\\ DA=DC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-1\vee d=5\\ (d+1)^2+(d-7)^2=(d+1)^2=(d-3)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow d=5\Rightarrow D(5;3)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow B(-3;-1)$. Vậy $A(-1;5)$, $B(-3;-1)$, $D(5;3)$

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $D(5;1)$. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm thuộc đường chéo AC sao cho $AC=4AN$. Tìm tọa độ điểm C biết phương trình đường thẳng MN là $3x-y-4=0$ và M có tung độ dương.

Giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của N trên BC và CD.

Khi đó NHCK là hình vuông và H là trung điểm của BM, suy ra $\Delta NMH=\Delta NBH=\Delta NDK$.

Do đó $DNM=DNK+KNM$

$=MNH+KMN=KNH=90^0$

Hay $DN\perp MN$ (1) và $NM=ND$ (2)

Từ (1) suy ra pt DN là: $x+3y-8=0$. Do đó $N(2;2)$

Ta có $M(m;3m-4)$. Từ (2) suy ra $\sqrt{(m-2)^2+(3m-6)^2}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow|m-2|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(1;-1)\text{ (loại)}\\ M(3;5)\end{array}\right.\Rightarrow M(3;5)$

Gọi $C(a;b)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MC}=0\\ DC=2MC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-5)(a-3)+(b-1)(b-5)=0\\ \sqrt{(a-5)^2+(b-1)^2}=2\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}\end{cases}$

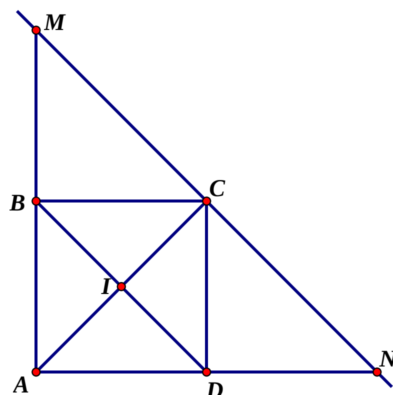
$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-8a-6b+20=0\\ 3a^2+3b^2-14a-38b+110=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-8a-6b+20=0\\ a-2b+5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(a;b)=(5;5)\\ (a;b)=\left(\frac{9}{5};\frac{17}{5}\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(5;5)\\ \left(\frac{9}{5};\frac{17}{5}\right)\end{array}\right.$

Vì C và D nằm cùng phía đối với MN nên $C(5;5)$.

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD cố định, biết $A(2;1)$, $I(3;2)$ (I là giao điểm của AC và BD). Một đường thẳng d đi qua C cắt các tia AB, AD lần lượt tại M và N. Viết phương trình đường thẳng d sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.

Giải



Đặt $CMB = NCD = x$. Gọi độ dài cạnh hình vuông là a.

Tam giác CMB vuông tại B và tam giác CDN vuông tại D. Có:

$MN = MC + CN$

$= \frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = a\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)$

Dùng AM – GM cho 2 số không âm $\frac{1}{\sin x}; \frac{1}{\cos x}$. Ta có:

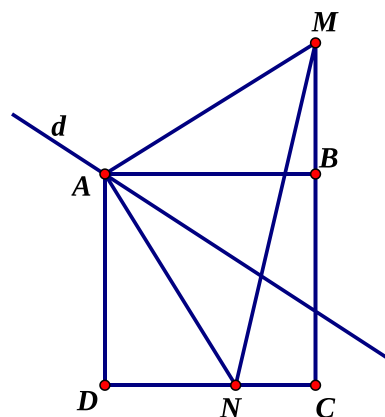
$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \ge \frac{2}{\sqrt{\sin x.\cos x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}$

Mà $\sin 2x \le 1$ nên $x = 45^0$

Vậy $MN \perp AC$. Phương trình đường thẳng MN qua $C(4;3)$ nhận $\overrightarrow{AC}$ làm pháp tuyến: $x + y - 7 = 0$. Vậy đường thẳng $x + y - 7 = 0$ thỏa mãn bài toán.

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$, đường thẳng BC đi qua điểm $M(4;0)$, đường thẳng CD đi qua điểm $N(0;2)$. Biết tam giác AMN cân tại A, viết phương trình đường thẳng BC.

Giải



Giả sử $A(t;t-4) \in d$, do tam giác AMN cân tại đỉnh A nên

$AM = AN \Leftrightarrow AM^2 = AN^2$

$\Leftrightarrow (t-4)^2 + (t-4)^2 = t^2 + (t-6)^2 \Leftrightarrow t = -1$

$\Rightarrow A(-1;-5)$

BC đi qua $M(4;0)$ nên phương trình BC có dạng $ax + by - 4a = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$

Do $CD \perp BC$ và CD đi qua $N(0;2) \Rightarrow$ phương trình CD: $bx - ay + 2a = 0$

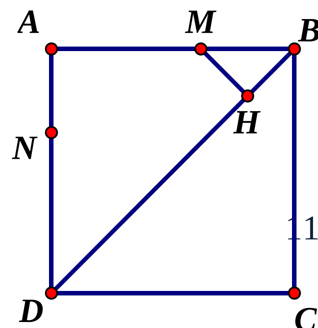
Do ABCD là hình vuông nên khoảng cách $d(A, BC) = d(A, CD)$

$\Leftrightarrow \frac{|-5a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|7a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a + b = 0 \\ a - 3b = 0 \end{array}\right.$

Nếu $3a + b = 0$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow$ phương trình BC: $x - 3y - 4 = 0$

Nếu $a - 3b = 0$, chọn $a = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$ phương trình BC: $3x + y - 12 = 0$.

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, có BD nằm trên đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$, điểm $M(-1;2)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(2;-2)$ thuộc đường thẳng AD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết điểm B có hoành độ dương.



Giải

Gọi H là hình chiếu của M trên d, suy ra $H(t;3-t)$

Ta có $\overrightarrow{MH}=(t+1;1-t)$, d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1)$. MH vuông góc với d suy ra:

$t+1-1+t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(1;1)$

Do đó $MB=\sqrt{2}.MH=2$

B thuộc d nên $B(b;3-b)$;

$MB=2 \Leftrightarrow (b+1)^2+(1-b)^2=4$

Suy ra $b=1$ hoặc $b=-1$ (loại). Từ đó $B(1;2)$.

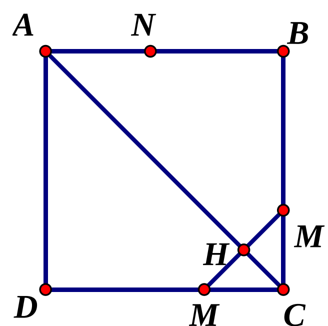
AB đi qua M và B nên phương trình AB là $y=2$. AD qua N và vuông góc với AB nên phương trình AD là $x=2$. Vậy $A(2;2)$

Tọa độ D là nghiệm hệ $\begin{cases} x=2 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow D(2;1)$. Gọi I là trung điểm BD suy ra $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. I là trung điểm AC nên $C(1;1)$.

Vậy $A(2;2)$, $B(1;2)$, $C(1;1)$, $D(2;1)$.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đường chéo AC có phương trình là $x+y-10=0$. Tìm tọa độ của điểm B biết rằng đường thẳng CD đi qua điểm $M(6;2)$, đường thẳng AB đi qua điểm $N(5;8)$.

Giải



Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua AC. Ta có M′ thuộc đường thẳng BC.

Phương trình đường thẳng MM′ là:

$1(x-6)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y-4=0$.

Gọi $H=AC\cap MM'$. Tọa độ H thỏa mãn hệ:

$\begin{cases} x+y-10=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow H(7;3)$

H là trung điểm của MM′. Suy ra $M'(8;4)$

Gọi $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$. Vì hai đường thẳng AB và AC tạo với nhau một góc bằng 45^0 nên ta có:

$\cos 45^0=\frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=|a+b| \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$

TH1: $a=0$. Phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là $y=8,\ x=8$. Suy ra $B(8;8)$.

TH2: $b=0$. Phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là $x=5;\ y=4$. Suy ra $B(5;4)$.

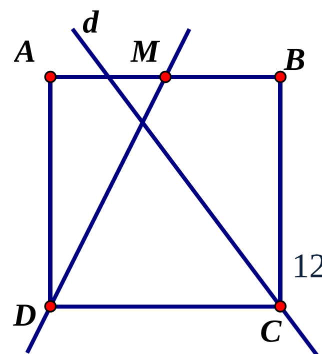
Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(2;-4)$, đỉnh C thuộc đường thẳng d: $3x+y+2=0$. Đường thẳng DM: $x-y-2=0$, với M là trung điểm của AB. Xác định tọa độ các đỉnh B, C, D biết rằng đỉnh C có hoành độ âm.

Giải

Đỉnh $C\in d: 3x+y+2=0$ nên $C(c;-3c-2)$

Do M là trung điểm của AB nên:

$d(A,DM)=\frac{1}{2}d(C,DM) \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\frac{|4c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow c=\pm 2$



Vì C có hoành độ âm nên ta chọn $c=-2\Rightarrow C(-2;4)$

Đỉnh $D\in DM: x-y-2=0$ nên $D(d;d-2)$

Ta có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(d-2)(d+2)+(d+2)(d-6)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=4\\d=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}D(4;2)\\D(-2;-4)\end{array}\right.$$

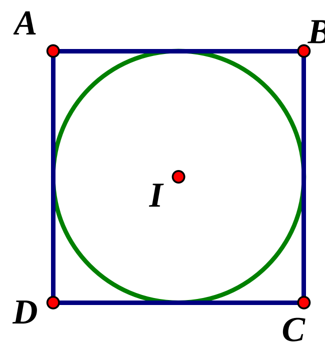
Vì ABCD là hình vuông nên điểm D phải thỏa mãn $DA=DC$ nên ta chỉ nhận trường hợp $D(4;2)$

Từ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ta suy ra $B(-4;-2)$

Vậy $B(-4;-2)$, $C(-2;4)$, $D(4;2)$

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) nội tiếp hình vuông ABCD có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=10$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C của hình vuông, biết cạnh AB đi qua $M(-3;-2)$ và điểm A có hoành độ dương.

Giải



Ptđt AB đi qua $M(-3;-2)$ có dạng $ax+by+3a+2b=0$. Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$ nên

$$\sqrt{10}=\frac{|2a+3b+3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow 10(a^2+b^2)=25(a+b)^2$$

$\Leftrightarrow(a+3b)(3a+b)=0\Leftrightarrow a=-3b$ hay $b=-3a$

Pt AB: $x-3y-3=0$ hoặc AB: $3x-y+7=0$

TH1: AB: $x-3y-3=0$, gọi $A(3t+3;t)\Rightarrow t>-1$ và do $IA^2=2R^2=20\Rightarrow t=1, t=-1$ (loại).

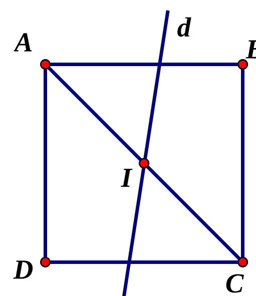
Suy ra $A(6;1)\Rightarrow C(-2;5)$

TH2: AB: $3x-y+7=0$, gọi $A(t;3t+7)\Rightarrow t>0$ và do $IA^2=2R^2=20\Rightarrow t=0, t=-2$ (không thỏa mãn)

Vậy $A(6;1)$, $C(-2;5)$

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(-3;5)$, tâm I thuộc đường thẳng $d: y=-x+5$ và diện tích bằng 25. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết rằng tâm I có hoành độ dương.

Giải



Diện tích hình vuông là $S=AB.AD=2AI^2=25$ nên $AI=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Điểm $I\in d: y=-x+5\Rightarrow I(a;5-a)$ với $a>0$, $AI^2=2a^2+6a+9$

Khi đó a là nghiệm phương trình $2a^2+6a+9=\frac{25}{2}\Leftrightarrow a=-\frac{7}{2}$ (loại), $a=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Tọa độ tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$, vì I là trung điểm AC nên tọa độ đỉnh $C(4;4)$

Đường thẳng Δ vuông góc AI có $\overrightarrow{n_\Delta}=(7;-1)$ nên phương trình là $\Delta: 7x-y+1=0$. Vì điểm B thuộc $\Delta: 7x-y+1=0$ nên $B(b;1+7b)$. Ta có $BI=AI \Leftrightarrow \left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+7b-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=0 \end{array}\right.$

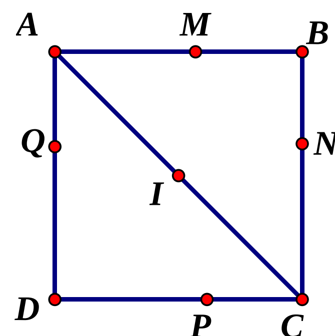
Với $b=0 \Rightarrow B(0;1)$. Do I là trung điểm BD nên $D(1;8)$;

Với $b=1 \Rightarrow B(1;8)$ và $D(0;1)$

Vậy tọa độ các đỉnh B, C, D là $B(1;8), C(4;4)$ và $D(0;1)$ hoặc $B(0;1), C(4;4)$ và $D(1;8)$.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $M(0;2), N(5;-3), P(-2;-2), Q(2;-4)$ lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD. Tính diện tích hình vuông đó.

Giải



Gọi AB, AD lần lượt là AB: $ax+b(y-2)=0 \Leftrightarrow ax+by-2b=0$

$AD: b(x-2)+a(y-4)=0 \Leftrightarrow bx-ay-2b-4a=0 \ (a^2+b^2 \neq 0)$

Theo giả thiết: $d(P;AB)=d(N;AD)$

$\Leftrightarrow \frac{|-2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a+b=0 \\ a+7b=0 \end{array}\right.$

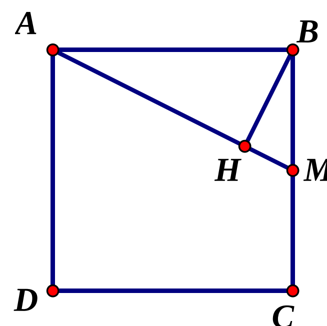
Với $3a+b=0$, chọn $a=1, b=-3$ thì diện tích hình vuông là:

$S=\left(\frac{|3b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=10$

Với $a+7b=0$, chọn $a=7, b=-1$, diện tích hình vuông là: $S=\left(\frac{|3b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=2$

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD với $A(0;0)$ và $M(10;5)$ là trung điểm của cạnh BC. Hãy viết phương trình dạng tổng quát các cạnh của hình vuông ABCD.

Giải



Gọi độ dài cạnh hình vuông là 2a, khi đó $AM^2=AB^2+BM^2=5a^2$, mà $AM^2=125 \Rightarrow a=5$

Kẻ $BH \perp AM \Rightarrow MH=\frac{MB^2}{MA}=\sqrt{5}$. Gọi $H(x;y)$, do $\overrightarrow{MH}$ và $\overrightarrow{MA}$ cùng hướng và $\frac{MH}{MA}=\frac{1}{5} \Rightarrow 5\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-10)=-10 \\ 5(y-5)=-5 \end{cases} \Rightarrow H(8;4)$

Điểm B là giao của đường thẳng qua H vuông góc với AM và đường tròn đường kính AM.

Ta có $\overrightarrow{AM}(10;5)$

Phương trình đường thẳng BH: $2x+y-20=0$

Phương trình đường tròn đường kính AM: $(x-5)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$

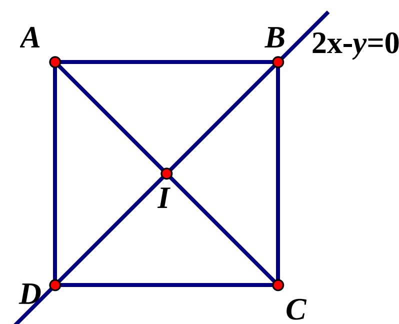
Gọi $B(t;20-2t) \Rightarrow (t-5)^2+\left(\frac{35}{2}-2t\right)^2=\frac{125}{4} \Leftrightarrow t^2-16t+60=0 \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=6 \end{array}\right.$

Với $t=10$, ta có $B(10;0)\Rightarrow C(10;10)$. Khi đó phương trình các cạnh của hình vuông ABCD là $AB: y=0,\ BC: x=10,\ CD: y=10,\ AD: x=0$

Với $t=6$, ta có $B(6;8)\Rightarrow C(14;2)$. Khi đó phương trình các cạnh của hình vuông ABCD là $AB: 4x-3y=0,\ BC: 3x+4y-50=0,\ CD: 4x-3y-50=0$, $AD: 3x+4y=0$.

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(0;5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $2x-y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C và D.

Giải



Từ giả thiết suy ra điểm A không thuộc đường thẳng có phương trình $y=2x$.

Đường chéo thứ hai đi qua A có phương trình $y=-\frac{1}{2}x+5$. Tâm $I(x_I;y_I)$ của hình vuông là giao của hai đường chéo, nên tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=2 \\ y_I=4 \end{cases}$

Khi đó C là điểm đối xứng của A qua điểm $I(2;4)$ nên $C(4;3)$

Do B và D thuộc đường thẳng $y=2x$ và $AB\perp BC,\ AD\perp DC$ nên $B(x_B;2x_B)$, $D(x_D;2x_D)$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0,\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(x_B;2x_B-5)$, $\overrightarrow{AD}(x_D;2x_D-5)$, $\overrightarrow{CB}(x_B-4;2x_B-3)$, $\overrightarrow{CD}(x_D-4;2x_D-3)$

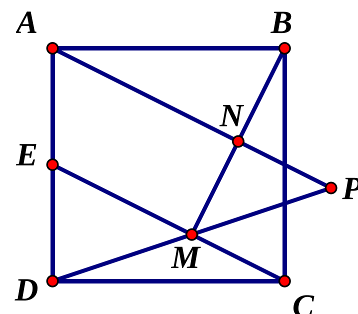
Suy ra $x_B,\ x_D$ là nghiệm của phương trình:

$$x(x-4)+(2x-5)(2x-3)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1\Rightarrow y_1=2 \\ x_2=3\Rightarrow y_2=6 \end{array}\right.$$

Vậy $B(1;2), C(4;3), D(3;6)$ hoặc $B(3;6), C(4;3), D(1;2)$

Bài 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có các đỉnh $A(-1;2), C(3;-2)$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD, BM là đường thẳng vuông góc với CE tại M; N là trung điểm của BM và P là giao điểm của AN với DM. Biết phương trình đường thẳng BM: $2x-y-4=0$. Tìm tọa độ điểm P.

Giải



Gọi I là trung điểm AC nên $I(1;0)$, B thỏa $AB=CB$ và $B\in BM$ nên tọa độ B thỏa:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y+2)^2 \\ 2x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ y=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Do đó $B(3;2)$, suy ra $D(-1;-2)$ (vì I cũng là trung điểm của BD).

Theo giả thiết E là trung điểm AD nên $E(-1;0)$ và $\overrightarrow{CE}=(-4;2)$

$M\in CE$ và $M\in BM$ nên tọa độ M thỏa

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-4}=\frac{y}{2} \\ 2x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{5} \\ y=-\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5};-\frac{6}{5}\right) \text{ và } N\left(\frac{11}{5};\frac{2}{5}\right)$$

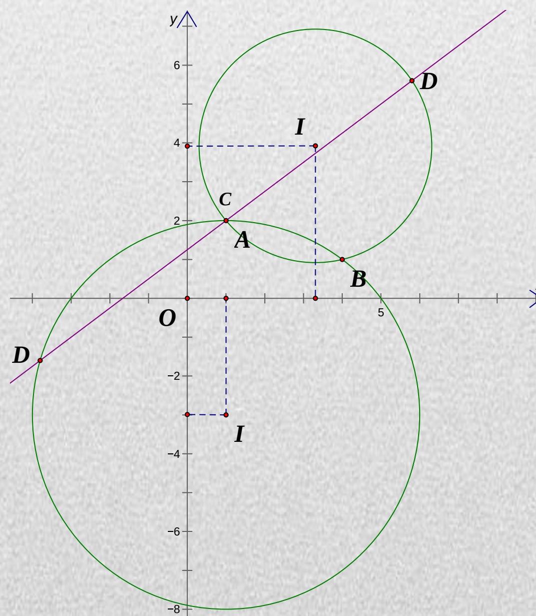
$P \in AN$ và $P \in DM$ nên tọa độ P thỏa $\begin{cases} \dfrac{x+1}{\frac{16}{5}} = \dfrac{y-2}{-\frac{8}{5}} \\ \dfrac{x+1}{\frac{12}{5}} = \dfrac{y+2}{\frac{4}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$. Vậy $P\left(\dfrac{19}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

TRẦN ĐÌNH CƯ
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

Tán đổ Oxy

Chủ đề 6: Đường tròn

Tài liệu mến tặng các em học sinh 12, chuẩn bị thi THPT Quốc gia 2016. Chúc các em đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến.



Huế, Ngày 16/05/2016

CHỦ ĐỀ 6. ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I $(x_I > 0)$, (C) đi qua điểm $A(-2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d_1): x+y+4=0$ tại điểm B. (C) cắt $(d_2): 3x+4y-16=0$ tại C và D sao cho ABCD là hình thang có hai đáy là AD và BC, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

Giải

Do ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn nên ABCD là hình thang cân. Do hai đường chéo vuông góc với nhau tại K nên ΔBKC vuông cân tại K, suy ra $ACB = 45^0 \Rightarrow AIB = 90^0$ (góc ở tâm cùng chắn cung AB) hay $IB \perp AI$ (1)

Lại do (d_1) tiếp xúc (C) tại B nên $IB \perp (d_1)$ (2). Từ (1), (2) suy ra $IB = d(A;d_1) = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $(AI//(d_1))$

Ta có pt $AI: x+y-1=0$. Do $I \in AI \Rightarrow I(a;1-a)$, $IA = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{9}{2} \end{array}\right.$

Vậy $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ do $(x_I > 0)$

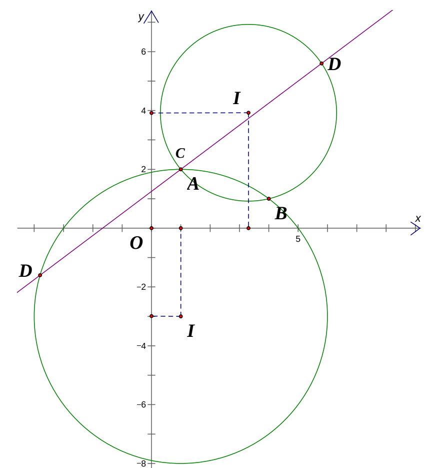
Pt đường tròn: $(C): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Xét hệ $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \\ 3x+4y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(0;4)$ hoặc $(x;y)=(4;1)$

B là hình chiếu của I lên (d_1) tính được $B(-2;-2)$. Do $AD//BC$ nên $B(-2;-2)$, $C(4;1)$, $D(0;4)$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(4;1)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và cắt d tại C, D sao cho $CD = 6$

Giải



Nhận xét A thuộc d nên A trùng với C hay D. (Giả sử A trùng với C)

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C), bán kính $R > 0$.

(C) đi qua A, B nên $IA = IB = R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + (2-b)^2} = \sqrt{(4-a)^2 + (1-b)^2} = R$

$\Leftrightarrow b = 3a - 6$

Suy ra $I(a;3a-6)$ và

$R = \sqrt{10a^2 - 50a + 65}$ (1)

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow IH \perp CD$ và $IH = d(I;d) = \frac{|-9a+29|}{5}$

$R = IC = \sqrt{CH^2 + IH^2} = \sqrt{9 + \frac{(9a-29)^2}{25}}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có:

$\sqrt{10a^2-50a+65}=\sqrt{9+\dfrac{(9a-29)^2}{25}}\Leftrightarrow 13a^2-56a+43=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=\dfrac{43}{13}\end{array}\right.$.

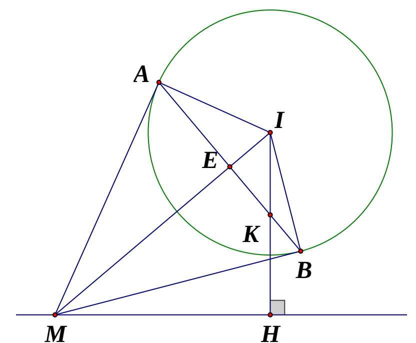
+ $a=1\Rightarrow I(1;-3),\ R=5$. Pt đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=25$

+ $a=\dfrac{43}{13}\Rightarrow I\left(\dfrac{43}{13};\dfrac{51}{13}\right),\ R=\dfrac{5\sqrt{61}}{13}$.

Pt đường tròn $(C):\left(x-\dfrac{43}{13}\right)^2+\left(y-\dfrac{51}{13}\right)^2=\dfrac{1525}{169}$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) tâm I bán kính $R=2$. Lấy điểm M trên đường thẳng $d:x+y=0$. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C), (với A, B là các tiếp điểm). Biết phương trình đường thẳng $AB:3x+y-2=0$ và khoảng cách từ tâm I đến d bằng $2\sqrt{2}$. Viết phương trình đường tròn (C)

Giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d, IH cắt AB tại K, IM cắt AB tại E.

Ta có $IH=2\sqrt{2}$

Mặt khác $\cos MIH=\dfrac{IE}{IK}=\dfrac{IH}{IM}$

$\Rightarrow IE.IM=IK.IH=IA^2=R^2=4$ (ta cũng có thể chứng minh $IE.IM=IK.IH$ (phương tích) vì tứ giác EMHK là tứ giác nội tiếp)

Theo giả thiết

$IH=2\sqrt{2}\Rightarrow IK=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow KH=\sqrt{2}$ do đó K là trung điểm của IH.

Gọi $K(t;2-3t)\Rightarrow d(K;d)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|2-2t|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|t-1|=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\Rightarrow K(0;2)\\t=2\Rightarrow K(2;-4)\end{array}\right.$

- Với $K(0;2)\Rightarrow IH:x-y+2=0\Rightarrow H(-1;1)\Rightarrow I(1;3)$

  $\Rightarrow(C):(x-1)^2+(y-3)^2=4$
- Với $K(2;-4)\Rightarrow IH:x-y+6=0\Rightarrow H(-3;3)\Rightarrow I(7;-11)$

  $\Rightarrow(C):(x-7)^2+(y+11)^2=4$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn là $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ và $(x-7)^2+(y+11)^2=4$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn: $(C):x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5;1)$, biết (C′) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Giải

Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y+2=0$ có tâm $I(1;-2),\ R=\sqrt{3}$

Ta có $IM=5$.

Đường tròn (C′) tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên $AB\perp IM$ tại trung điểm H của đoạn AB.

Ta có: $AB = AI = IB = \sqrt{3}$ nên ΔABC đều $\Rightarrow IH = AB.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

TH1: I và M nằm khác phía với AB thì $HM = IM - IH = \frac{7}{2}$

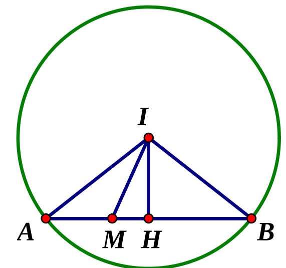
$$\Rightarrow AM^2 = HM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 13 \Rightarrow (C'): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$$

TH2: I và M nằm cùng phía với AB thì $HM = IM + IH = \frac{13}{2}$

$$AM^2 = HM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 43 \Rightarrow (C'): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ tâm I và điểm $M(3;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Giải



(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 3$. Ta có $IM = 2 < R$ nên M nằm trong đường tròn (C). Gọi H là hình chiếu của I trên AB và đặt $IH = t,\ 0 < t \le 2$

Ta có: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = t\sqrt{9 - t^2}$. Xét hàm $f(t) = t\sqrt{9-t^2};\ 0 < t \le 2$

Ta có: $f'(t) = \frac{9 - 2t^2}{\sqrt{9 - t^2}} > 0,\ \forall t \in (0;2]$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;2]$

$\Rightarrow f(t) \le f(2)$

Vậy S_{IAB} lớn nhất khi $d(I;\Delta) = t = 2$ hay $H \equiv M$.

Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vec-tơ pháp tuyến, suy ra $\Delta: x - 3 = 0$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(T): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: 3x + y - 10 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) biết tâm I của (C) có hoành độ âm và nằm trên đường thẳng $d: x - y = 0$, (C) tiếp xúc với Δ và cắt (T) tại A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Giải

Đường tròn (T) có tâm $K(2;2)$ bán kính $r = 2$.

Gọi $I(t;t)$, bán kính của đường tròn (C) là $R = d(I;\Delta) = \frac{|4t - 10|}{\sqrt{10}}$

Ta có $d(I;AB) = \sqrt{R^2 - 2} = \sqrt{\frac{2(2t-5)^2}{5} - 2} = \sqrt{\frac{8}{5}(t^2 - 5t + 5)}$

và $d(K;AB) = \sqrt{2};\ IK = \sqrt{2}|t-2| = \sqrt{2}(2-t)$ (do t<0)

TH1. I, K khác phía đối với AB:

$$d(I;AB) + d(K;AB) = IK \Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{5}(t^2 - 5t + 5)} = 1 - t \Rightarrow t = -5 - 2\sqrt{10}$$

$\Rightarrow (C):\left(x+5+2\sqrt{10}\right)^2+\left(y+5+2\sqrt{10}\right)^2=\left(8+3\sqrt{10}\right)^2$

TH2. I, K khác phía đối với AB:

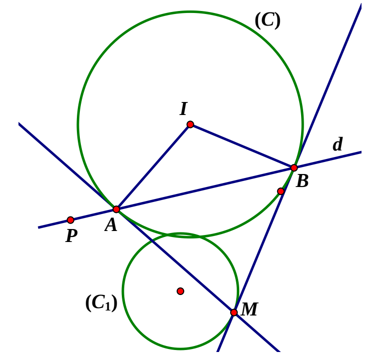
$|d(I;AB)-d(K;AB)|=IK\Rightarrow\left|2\sqrt{\frac{1}{5}\left(t^2-5t+5\right)}-1\right|=2-t \qquad (*)$

(*) không có nghiệm âm.

Vậy $(C):\left(x+5+2\sqrt{10}\right)^2+\left(y+5+2\sqrt{10}\right)^2=\left(8+3\sqrt{10}\right)^2$

Bài 7. Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và $P(2;1)$. Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn tại A và B. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại M. Tìm tọa độ của M biết M thuộc đường tròn $x^2+y^2-6x-4y+11=0$.

Giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, $R=2$.

Gọi $M(a;b)$.

Do $M\in(C_1)\Rightarrow a^2+b^2-6a-4b+11=0 \ (1)$

Phương trình đường tròn đường kính IM:

$x^2+y^2-(a+1)x-(b+2)y+a+2b=0$

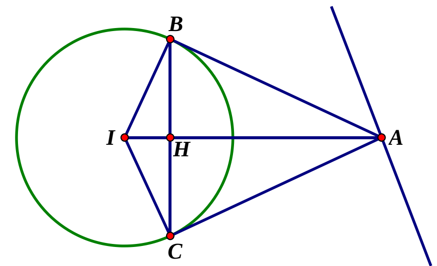
Suy ra phương trình đường thẳng d: $(a-1)x+(b-2)y+1-a-2b=0$

Do $P\in d\Rightarrow a-b-3=0 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}\Rightarrow M(4;1)$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$. Từ điểm A thuộc Δ kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C. Tìm tọa độ điểm A biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 8.

Giải



(C) có tâm $I(2;2)$, $R=\sqrt{5}$.

$A\in\Delta\Rightarrow A(a;-a-1)$

Từ tính chất tiếp tuyến $\Rightarrow IA\perp BC$ tại H là trung điểm của BC.

Giả sử $IA=m$, $IH=n$ $(m>n>0)$

$\Rightarrow HA=m-n$, $BH=\sqrt{IB^2-IH^2}=\sqrt{5-n^2}$

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=BH.AH=(m-n)\sqrt{5-n^2}=8 \qquad (1)$

Trong tam giác vuông IBA có $BI^2=IH.IA\Leftrightarrow 5=m.n\Leftrightarrow m=\frac{5}{n} \qquad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có: $\left(\frac{5}{n}-n\right)\sqrt{5-n^2}=8\Leftrightarrow n^6-15n^4+139n^2-125=0$

$\Leftrightarrow (n^2-1)(n^4-14n^2+125)=0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow m=5$

$IA=5 \Leftrightarrow (a-2)^2+(-a-3)^2=25 \Leftrightarrow a^2+a-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(2;-3) \\ A(-3;2) \end{array}\right.$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $E(3;4)$, đường thẳng $d: x+y-1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y-4=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

Giải

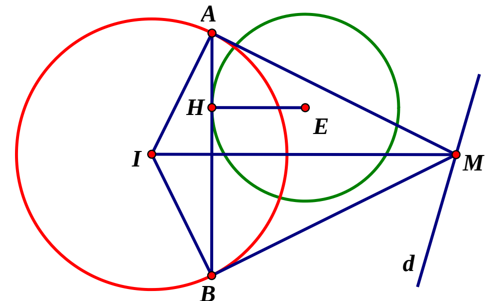
Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=3$. Do $M \in d$ nên $M(a;1-a)$.

Do M nằm ngoài (C) nên $IM > R \Leftrightarrow IM^2 > 9 \Leftrightarrow (a+2)^2+(-a)^2 > 9$

$\Leftrightarrow 2a^2+4a-5>0 \qquad (*)$

Ta có $MA^2=MB^2=IM^2-IA^2$

$=(a+2)^2+(-a)^2-9=2a^2+4a-5$



Do đó tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình:

$(x-a)^2+(y+a-1)^2=2a^2+4a-5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax+2(a-1)y-6a+6=0 \,(1)$ Do A, B thuộc (C) nên tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình $x^2+y^2+4a-2y-4=0 \qquad (2)$

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được $(a+2)x-ay+3a-5=0 \quad (3)$

Do tọa độ của A, B thỏa mãn (3) nên (3) chính là phương trình của đường thẳng Δ đi qua A, B.

Do (E) tiếp xúc với Δ nên (E) có bán kính $R_1=d(E;\Delta)$.

Chu vi của (E) lớn nhất $\Leftrightarrow R_1$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(E;\Delta)$.

Nhận thấy đường thẳng Δ luôn đi qua $K\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của E lên $\Delta \Rightarrow d(E;\Delta)=EH \le EK=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K \Leftrightarrow \Delta \perp EK$.

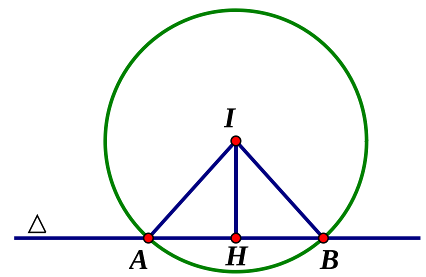
Ta có $\overrightarrow{EK}=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, Δ có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;a+2)$

Do đó $\Delta \perp EK \Leftrightarrow \overrightarrow{EK}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}(a+2)=0 \Leftrightarrow a=-3$ (thỏa mãn (*))

Vậy $M(-3;4)$ là điểm cần tìm.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+6y-15=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng $d: 4x-3y+2=0$ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A và B sao cho $AB=6$.

Giải



Theo bài ta ta có đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R=5$

Vì Δ vuông góc với $d:4x-3y+2=0$ nên có dạng $\Delta:3x+4y+m=0$.

Gọi H là trung điểm của AB. Theo bài ra ta có $IH=4$

Để $\Delta:3x+4y+m=0$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$ thì:

$$d(I;\Delta)=4\Leftrightarrow\frac{|3.1+4.(-3)+m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

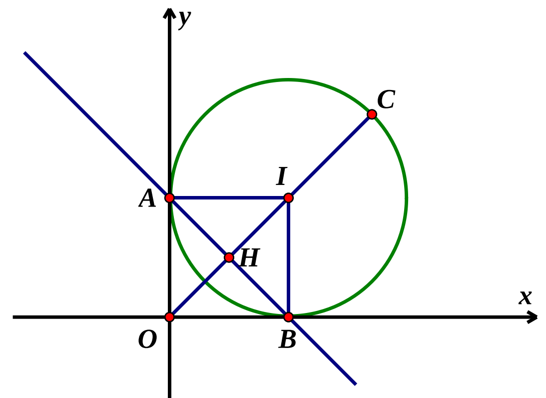
$$\Leftrightarrow\frac{|m-9|}{5}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=29\\m=-11\end{array}\right.$$

Vậy ta có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là:

$\Delta_1:3x+4y+29=0,\ \Delta_2:3x+4y-11=0$

Bài 11. Trọng mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-4y+4=0$ và đường thẳng d có phương trình: $x+y-2=0$. Chứng minh rằng d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm toa độ điểm C trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác CAB lớn nhất.

Giải



Chỉ ra (C) có tâm $I(2;2)$, $R=2$

Tọa độ giao điểm d và (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2-4x-4y+4=0\\x+y-2=0\end{cases}$$

Giải hệ tìm được $A(0;2)$, $B(2;0)$

Hay d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.CH$ (H là hình chiếu C trên AB),

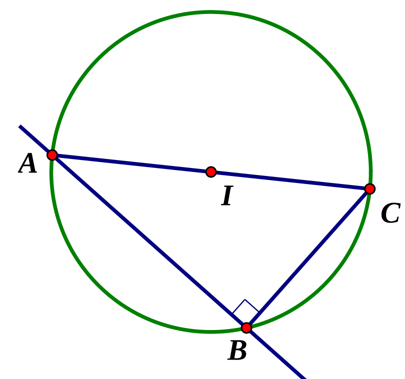
$S_{\Delta ABC\max}\Leftrightarrow CH_{\max}$

Dễ thấy $\begin{cases}C=\Delta\cap(C)\\x_C>2\end{cases}$. (Δ) có phương trình: $y=x$

Giải hệ tìm được $C\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(T):x^2+y^2-4x-6y+3=0$ và đường thẳng $(\Delta):x-2y-1=0$. Gọi A, B là giao điểm của (Δ) với (T) biết điểm A có tung độ dương. Tìm tọa độ điểm $C\in(T)$ sao cho ΔABC vuông tại B.

Giải



Tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-2y-1=0\\x^2+y^2-4x-6y+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+1\\(2y+1)^2+y^2-4(2y+1)-6y+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+1\\5y^2-10y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$$

Suy ra $A(5;2)$, $B(1;0)$

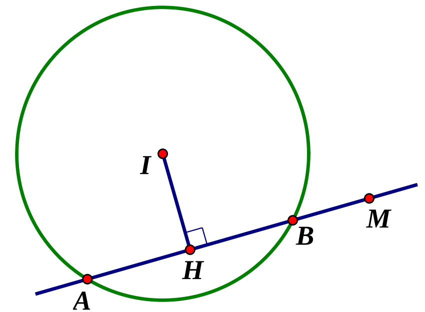
Đường tròn (T) có tâm $I(2;3)$

Vì $A,B,C\in(T)$ và ΔABC vuông tại B nên AC là đường kính của đường tròn (T)

Suy ra I là trung điểm của AC $\Rightarrow C(-1;4)$

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x-2y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ và cắt đường tròn (C) theo dây cung có độ dài bằng 4.

Giải



Từ đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$ và bán kính $R=3$. Giả sử (C) cắt d tại 2 điểm A, B. Hạ $IH\perp AB$ thì H là trung điểm AB suy ra $AH=2$.

Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5}$

Vì d qua $M(0;2)$ nên có phương trình:

$a(x-0)+b(y-2)=0\ \left(a^2+b^2>0\right)$

$\Leftrightarrow ax+by-2b=0$

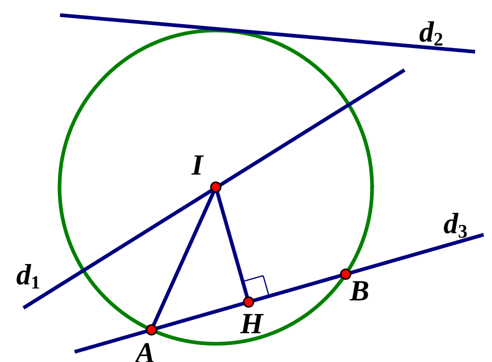
Ta có: $IH=\sqrt{5}\Leftrightarrow \dfrac{|3a+b-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow 2a^2-3ab-2b^2=0$

Chọn $b=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\\ a=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy có đường thẳng là $(d_1): 2x+y-2=0; (d_2): x-2y+4=0$

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho 3 đường thẳng sau: $d_1: x+2y-3=0$; $d_2: 2x+y+2=0$ và $d_3: 3x-4y+11=0$. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm trên d_1, tiếp xúc với d_2 và cắt d_3 tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2$.

Giải



Gọi I là tâm của (T) khi đó $I\in d_1$ nên $I(3-2a;a)$ và R là bán kính của (T).

Do (T) tiếp xúc với d_2 nên $d(I,d_2)=\dfrac{|8-3a|}{\sqrt{5}}=R$

Gọi H là trung điểm của AB suy ra tam giác IAH vuông tại H và $AH=1$

Khi đó;

$IA^2=AH^2+IH^2\Leftrightarrow R^2=1+IH^2\quad (2)$

$IH=d(I,d_3)=\dfrac{|20-10a|}{5}=|4-2a|$

Từ $(2)\Leftrightarrow \dfrac{(8-3a)^2}{5}=1+(4-2a)^2\Leftrightarrow (8-3a)^2=5+5(4-2a)^2$

$\Leftrightarrow 64-48a+9a^2=5+5\left(16-16a+4a^2\right)\Leftrightarrow 64-48a+9a^2=5+80-80a+20a^2$

$\Leftrightarrow 11a^2 - 32a + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \frac{21}{11} \end{array}\right.$

Với $a = 1 \Rightarrow I(1;1), R = \sqrt{5}$ nên phương trình $(T): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

Với $a = \frac{21}{11} \Rightarrow I\left(-\frac{9}{11};\frac{21}{11}\right), R = \frac{5\sqrt{5}}{11}$ nên pt $(T): \left(x+\frac{9}{11}\right)^2 + \left(y-\frac{21}{11}\right)^2 = \frac{125}{121}$

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): 4x - 3y + 8 = 0$, $(d'): 4x + 3y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 20x - 2y + 20 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) tiếp xúc với (C) và đồng thời tiếp xúc với đường thẳng (d) và (d′)

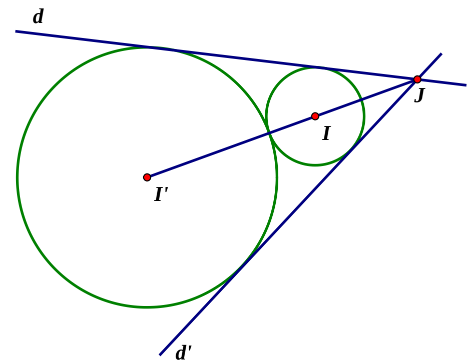
Giải

(C) có tâm $I(10;1)$, bán kính $R = 9$

Ta có: $d(I,(d_1)) = d(I,(d_2)) = 9 = R$

$\Rightarrow$ (C) tiếp xúc với (d_1) và (d_2)

$(d_1) \cap (d_2) = J \Rightarrow J\left(-\frac{5}{4};1\right) \Rightarrow IJ: y - 1 = 0$



Gọi I′ là tâm của (C′) $\Rightarrow I'(t;1) \in IJ$, $t > -\frac{4}{5}$

Bán kính $R' = d(I';(d_1)) = \frac{4t+5}{5}$

(C′) tiếp xúc với $(d_1),(d_2)$ và (C) thì chỉ có trường hợp (C′) tiếp xúc ngoài (C).

$\Leftrightarrow II' = R + R' \Leftrightarrow |t - 10| = 9 + \frac{4t+5}{5} \Leftrightarrow 9t(t-100) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 100 \end{array}\right.$

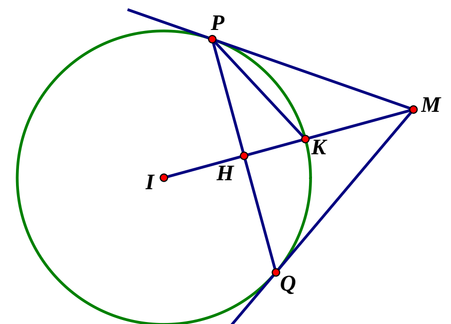
$t = 0 \Rightarrow (C'): x^2 + (y-1)^2 = 1$

$t = 100 \Rightarrow (C'): (x-100)^2 + (y-1)^2 = 6561$

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ và điểm $M\left(\frac{31}{3};2\right)$. Vẽ các tiếp tuyến MP, MQ với đường tròn (C) tại các tiếp điểm P, Q. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác MPQ.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R = 5$



Gọi K là giao điểm của đoạn MI với (C) thì $IK = R = 5$ và K là điểm chính giữa của cung nhỏ PQ nên K là tâm đường tròn nội tiếp ΔMPQ.

Phương trình đường thẳng $MI: y = 2$ nên $K(x_K;2)$

Gọi H là giao điểm của PQ với MI, ta có $H(x_H;2)$, $MI \perp PQ$ và KH là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔMPQ.

Do IP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔPHM nên $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IM} = IP^2 = 25$

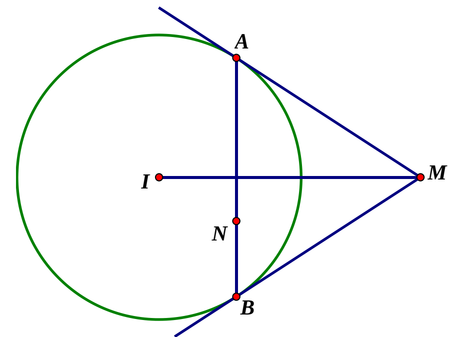
$\Leftrightarrow (x_H - 2)\left(\frac{31}{3} - 2\right) = 25 \Leftrightarrow x_H = 5$. Vậy $H(5;2)$ và $IH = 3 \Rightarrow KH = IK - IH = 2$

Ta có $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IH}$ cùng chiều và $\frac{IH}{IK} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{5}{3}\overrightarrow{IH} \Rightarrow K(7;2)$

Phương trình đường tròn nội tiếp ΔMPQ là: $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 4$

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và điểm $N(2;1)$. Tìm trên đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ điểm M sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (với A, B là 2 tiếp điểm) và đường thẳng AB đi qua N.

Giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 2$

Gọi $M(t;-2-t) \in d$

Nếu $T(x;y)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) thì

$$\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT} = 0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{MT} = (x - t; y + 2 + t)$, $\overrightarrow{IT}(x-1; y-2)$

Do đó ta có hệ: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 & (1) \\ (x-t)(x-1) + (y-2)(y+2+t) = 0 & (2) \end{cases}$

Trừ vế với vế của (1) cho (2) ta được $(-t+1)x + (t+4)y - t - 5 = 0$ (*)

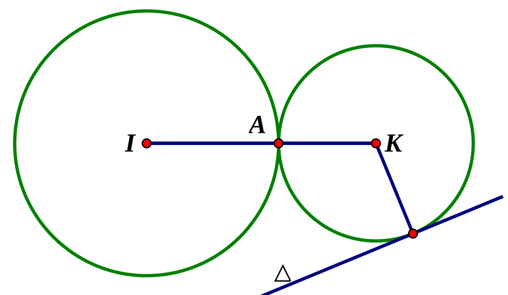
Tọa độ các tiếp điểm kẻ từ M đến (C) thỏa mãn (*) nên phương trình đường thẳng AB là $(-t+1)x + (t+4)y - t - 5 = 0$

Vì AB đi qua $N(2;1)$ nên $(-t+1).2 + (t+4).1 - t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Vậy $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$, điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x - y + 6 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) tiếp xúc với (C) tại A và tiếp xúc với Δ.

Giải



Ta có (C) có tâm $I(-2;1)$, $R = \sqrt{5}$

Đường thẳng IA qua $I(-2;1)$ và nhận $\overrightarrow{IA} = (2;1)$ làm vec-tơ chỉ phương nên có phương trình $x + 2 - 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$

Do (C′) tiếp xúc với Δ nên (C′) có bán kính $R' = d(K,\Delta) = \frac{|3y-2|}{\sqrt{5}}$

Do (C′) qua A nên $R' = KA = \sqrt{(2y-4)^2 + (y-2)^2}$

Từ đó ta có:

$$\frac{|3y-2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{(2y-4)^2+(y-2)^2}\Leftrightarrow|3y-2|=5|y-2|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=4\Rightarrow K(4;4)\\ y=\frac{3}{2}\Rightarrow K\left(-1;\frac{3}{2}\right)\end{array}\right.$$

Với $K\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ ta có $R'=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Với $K(4;4)$ ta có $R'=2\sqrt{5}$. Vậy phương trình của (C′) là $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ hoặc $(x-4)^2+(y-4)^2=20$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-6y+3=0$ có tâm I và đường thẳng $d:x-2y-11=0$. Tìm hai điểm A và B trên đường tròn (C) sao cho AB song song với đường thẳng d và tam giác IAB là tam giác vuông cân.

Giải

$AB//d\Rightarrow AB:x-2y+c=0$

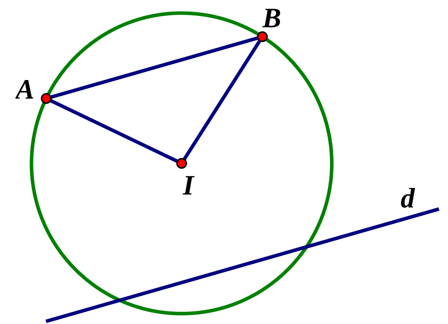
Tam giác IAB vuông cân $\Rightarrow d(I,AB)=\frac{R\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|2-2.3+c|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}.\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow c=9$ hoặc $c=-1$

$c=-1$: Giải hệ $\begin{cases}x^2+y^2-4x-6y+3=0\\ x-2y-1=0\end{cases}$

$\Rightarrow A(1;0),\ B(5;2)$

$c=9$: Giải hệ $\begin{cases}x^2+y^2-4x-6y+3=0\\ x-2y+9=0\end{cases}\Rightarrow A(-1;4),\ B(3;6)$



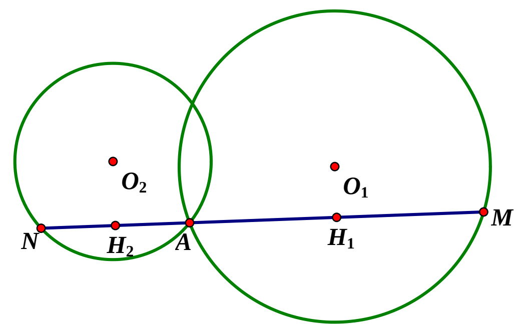
Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(C_2):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ cắt nhau tại điểm $A(1;4)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt lại $(C_1),(C_2)$ lần lượt tại M và N sao cho $AM=2AN$.

Giải

$(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=4\ \Rightarrow(C_1)$ có tâm $O_1(1;2)$ và bán kính $R_1=2$

$(C_2):(x-2)^2+(y-3)^2=2\ \Rightarrow(C_2)$ có tâm $O_2(2;3)$ và bán kính $R_2=\sqrt{2}$, $A(1;4)$

Giả sử MN: $a(x-1)+b(y-4)=0,\ a^2+b^2>0$ (do MN đi qua A). Gọi H_1, H_2 lần lượt là trung điểm của AM, AN



$\Rightarrow AH_1=2AH_2\Leftrightarrow R_1^2-O_1H_1^2=4\left(R_2^2-O_2H_2^2\right)$

$\Leftrightarrow R_1^2-d^2(O_1,(d))=4\left(R_2^2-d^2(O_2,(d))\right)$

$$\Rightarrow 4-\left[\frac{|a+2b-a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]=4\left[2-\frac{|2a+3b-a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow 4-\frac{4}{a^2+b^2}=8-\frac{4(a-b)^2}{a^2+b^2}\Leftrightarrow\frac{a^2-2ab}{a^2+b^2}=1\Leftrightarrow b^2+2ab=0$$

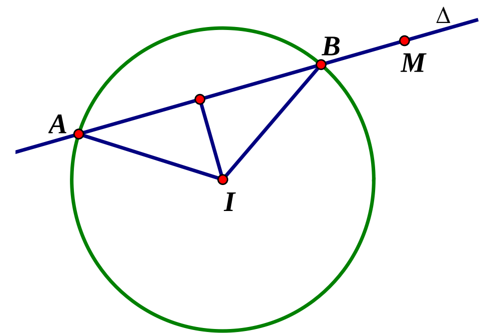
$b=0,\ a\neq 0\Rightarrow (d): x-1=0$

$2a+b=0$ chọn $a=1, b=-2\Rightarrow d: x-2y+7=0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $d: x-1=0$ và $d: x-2y+7=0$

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+4=0$ và $M\left(-\frac{5}{6};0\right)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho số đo cung nhỏ AB bằng 120^0.

Giải



(C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=1$

Từ giả thiết có $AIB=120^0$

Gọi H là trung điểm đoạn thẳng AB $\Rightarrow IH=IA.\cos 60^0=\frac{1}{2}$

Đường thẳng (Δ) qua M với vtpt $\vec{n}=(a;b)$ có pt:

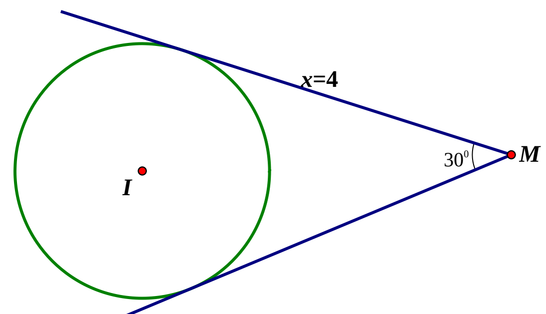
$ax+by+\frac{5}{6}a=0\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$

Có $d(I,\Delta)=\frac{|11a-12b|}{6\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{4}b \\ a=\frac{45}{28}b\end{array}\right.$

Phương trình cần tìm: $3x+4y+\frac{5}{2}=0$, $45x+28y+\frac{75}{2}=0$

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x=0$. Tìm những điểm trên đường thẳng $x=4$ mà từ những điểm đó kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 30^0.

Giải



Gọi điểm $M(4;b)$ thuộc đường thẳng $x=4, (b\in\mathbb{R})$

$(C): (x-2)^2+y^2=4$, (C) có tâm $I(2;0)$, bán kính $R=2$

Do đường thẳng $x=4$ là tiếp tuyến của (C), nên yêu cầu bài toán là tìm những điểm trên đường thẳng $x=4$ có hệ số góc $k=\pm\tan 60^0=\pm\sqrt{3}$

$k=\sqrt{3}$: d là đường thẳng qua M có hệ số góc $k=\sqrt{3}$ có phương trình: $y=\sqrt{3}(x-y)+b\Leftrightarrow \sqrt{3}x-y-4\sqrt{3}+b=0$

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I,d)=R\Leftrightarrow \left|b-2\sqrt{3}\right|=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4+2\sqrt{3} \\ b=-4+2\sqrt{3}\end{array}\right.$

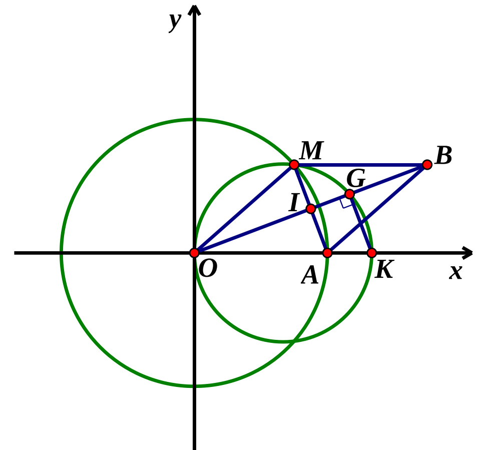
$k=-\sqrt{3}$: d′ là đường thẳng qua M có hệ số góc $k=-\sqrt{3}$ có phương trình: $y=-\sqrt{3}(x-y)+b\Leftrightarrow \sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}-b=0$

d′ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I,d')=R\Leftrightarrow \left|-b-2\sqrt{3}\right|=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4-2\sqrt{3} \\ b=4-2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy có 4 điểm $\left(4;4+2\sqrt{3}\right), \left(4;-4+2\sqrt{3}\right), \left(4;-4-2\sqrt{3}\right), \left(4;4-2\sqrt{3}\right)$

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2=9$, đường thẳng $\Delta: y=x-3+\sqrt{3}$ và điểm $A(3;0)$. Gọi M là một điểm thay đổi trên (C) và B là điểm sao cho tứ giác ABMO là hình bình hành. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABM, biết G thuộc Δ và G có tung độ dương.

Giải



Gọi $I = AM \cap OB \Rightarrow OG = \frac{4}{3}OI$

Kẻ $GK//AM$, $K \in OA$, ta có: $\overrightarrow{OK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} \Rightarrow K(4;0)$

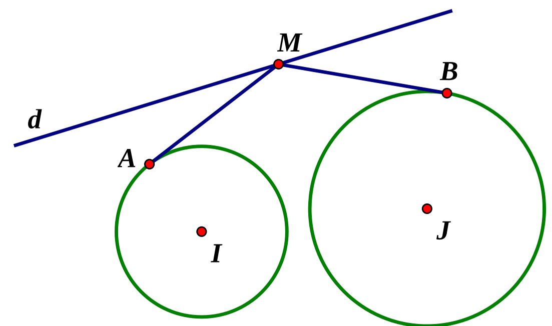
$GK//AM \Rightarrow GK \perp OB$. Suy ra G thuộc đường tròn đường kính OK. Tọa độ $G(x;y)$, $y>0$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} y=x-3+\sqrt{3} \\ (x-2)^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3-\sqrt{3} \\ \left(y+1-\sqrt{3}\right)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3-\sqrt{3} \\ 2y^2+2\left(1-\sqrt{3}\right)y-2\sqrt{3}=0 \end{cases} \Rightarrow G\left(3;\sqrt{3}\right) \text{ (do } y>0\text{)}$$

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+4=0$ và hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(C_2):(x+3)^2+(y-4)^2=4$. Tìm điểm M trên đường thẳng d để từ M kẻ được tiếp tuyến MA đến đường tròn (C_1) và tiếp tuyến MB đến đường tròn (C_2) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác AMB cân tại M.

Giải



(C_1) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R_1=1$; (C_2) có tâm $J(-3;4)$, bán kính $R_2=2$

Do $IJ=5>R_1+R_2 \Rightarrow (C_1),(C_2)$ rời nhau nên A và B phân biệt.

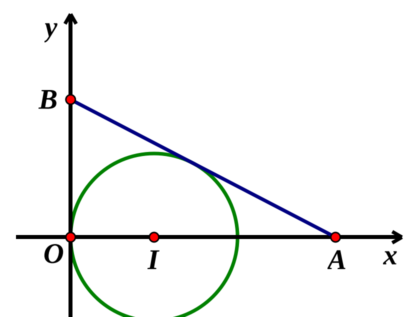
$M(t;t+4=)\in d \Rightarrow MA^2=MI^2-R_1^2=2t^2+4t+9$

$MB^2=MJ^2-R_2^2=2t^2+6t+5$

Tam giác AMB cân tại M $\Leftrightarrow MA^2=MB^2 \Leftrightarrow t=2$. Vậy $M(2;6)$

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (ω) có phương trình $x^2+y^2-2x=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (ω), biết tiếp tuyến cắt trục Ox và Oy lần lượt tại A và B thỏa mãn $OA=2OB$.

Giải



(ω) có tâm $I(1;0)$ bán kính $R=1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến $\Rightarrow |k|=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng $x \pm 2y+m=0$

Do $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|1+m|}{\sqrt{5}}=1$

$\Leftrightarrow m=-1\pm\sqrt{5}$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn $x \pm 2y - 1 \pm \sqrt{5} = 0$.

Bài 26. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $2x + y - 6 = 0$ đi qua điểm $M\left(1;2+\sqrt{3}\right)$ và tiếp xúc với trục tung.

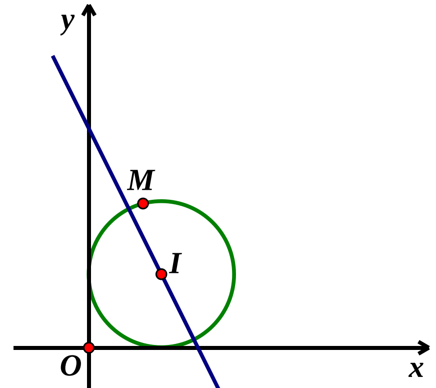
Giải

Gọi I và R là tâm và bán kính đường tròn.

Do I thuộc đường thẳng $2x + y - 6 = 0 \Rightarrow I(x;6-2x)$

Ta có $IM = d(I;Oy) = R$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(4-\sqrt{3}-2x\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5-2\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$



Vậy có hai phương trình đường tròn:

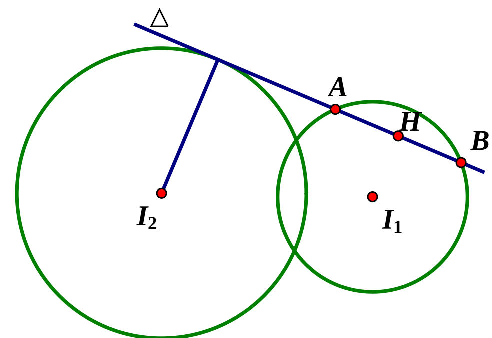
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4; \left(x - \frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7+2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình lần lượt là: $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Lập phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với (C_1), đồng thời cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho: $AB = 2\sqrt{2}$.

Giải

(C_1) có tâm $I_1(1;0)$ và bán kính $R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Giả sử đường thẳng Δ có phương trình dạng: $ax + by + c = 0 \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$



Δ tiếp xúc với $(C_1) \Leftrightarrow d(I_1,\Delta) = R_1$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Gọi H là trung điểm AB

$$\Rightarrow d(I_2,\Delta) = I_2H = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $2|a+c| = |2a+2b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2b \\ c = -\dfrac{4a+2b}{3} \end{array}\right.$

Với $c = 2b \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}|a+2b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = -7b \end{array}\right.$

Do $a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$. Chọn $b = -1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, c = -2 \\ a = 7.c = -2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ là: $x - y - 2 = 0;\ 7x - y - 2 = 0$

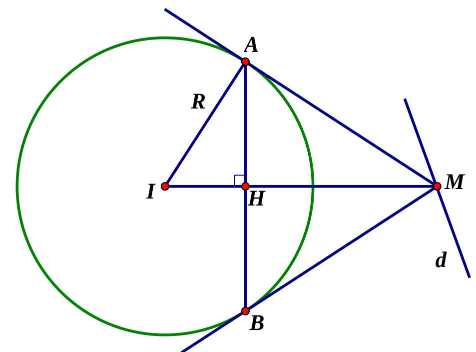
Với $c=-\frac{4a+2b}{3}\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\left|\frac{a+2b}{3}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=a\\b=7a\end{array}\right.$

Do $a^2+b^2\neq0\Rightarrow a\neq0$. Chọn $a=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=1,c=-2\\b=7,c=-6\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ là: $x+y-2=0,\ x+7y-6=0$

Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$ và đường thẳng $d:x-3y-9=0$. Từ điểm M thuộc d kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với (C) lần lượt tại A và B. Tìm tọa độ điểm M sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

Giải



(C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$, $d(I,d)=\sqrt{10}>R$ nên d không cắt (C).

$M\in d\Rightarrow M(3m+9;m)$

Từ tính chất tiếp tuyến ta có $MI\perp AB$ tại H là trung điểm AB.

Trong tam giác vuông AIM ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AM^2}$

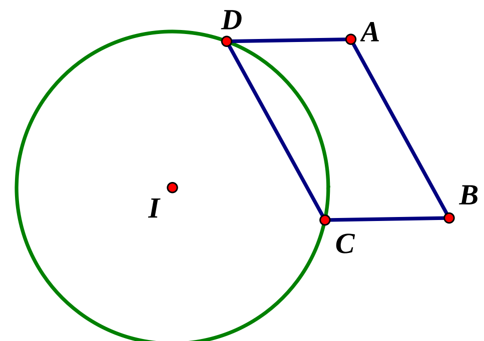
$\Rightarrow AH^2=\frac{AI^2.AM^2}{AI^2+AM^2}=\frac{R^2\left(IM^2-R^2\right)}{IM^2}=R^2-\frac{R^4}{IM^2}$

Ta có AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IM nhỏ nhất ($R=\sqrt{5}$ không đổi)

Mà $IM^2=(3m+7)^2+(m-1)^2=10(m+2)^2+10\geq10$ nên suy ra $IM_{min}=\sqrt{10}$ khi $m=-2$. Suy ra $M(3;-2)$

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C):x^2+y^2-x-9y+18=0$ và hai điểm $A(4;1),\ B(3;-1)$. Các điểm C, D thuộc đường tròn (C) sao cho ABCD là hình bình hành. Viết phương trình đường thẳng CD.

Giải



Chỉ ra đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Tính được $\overrightarrow{AB}=(-1;-2)$, $AB=\sqrt{5}$. Phương trình CD có dạng $y=2x-y+m$

Khoảng cách từ I đến CD bằng $d=\frac{|2m-7|}{2\sqrt{5}}$

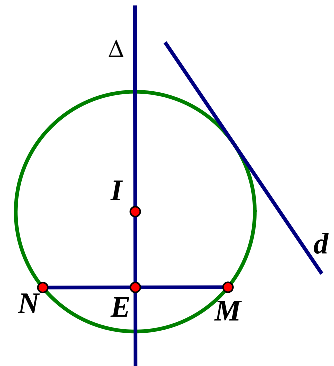
Chỉ ra $CD=2\sqrt{R^2-d^2}$

Do đó $2\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{(2m-7)^2}{20}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(2m-7)^2=25$

Từ đó được hai phương trình đường thẳng là $2x-y+6=0;\ 2x-y+1=0$

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1;2)$, $N(3;-4)$ và đường thẳng $(d):x+y-3=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm M, N và tiếp xúc với (d).

Giải



Gọi E là trung điểm MN, ta có $E(2;-1)$. Gọi Δ là đường trung trực của MN.

Suy ra Δ có phương trình $x-2-3(y+1)=0 \Leftrightarrow x-3y-5=0$

Gọi I là tâm đường tròn đi qua M, N thì I nằm trên Δ

Giả sử $I(3t+5;t)$. Ta có:

$$IM=d(I,d)\Leftrightarrow (3t+4)^2+(t-2)^2=\frac{(4t+2)^2}{2}$$

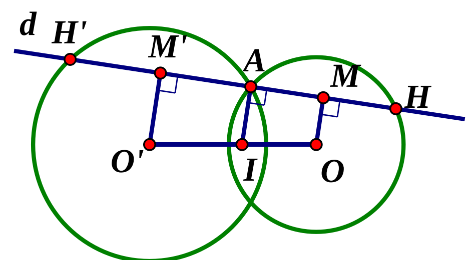
$\Leftrightarrow 2t^2+12t+18=0 \Leftrightarrow t=-3$. Từ đó suy ra $I(-4;-3)$, bán kính $R=IM=5\sqrt{2}$

.

Phương trình đường tròn $(x+4)^2+(y+3)^2=50$.

Bài 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2=13$ và $(C'): (x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là một giao điểm của (C) và (C′) với $y_A>0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt (C), (C′) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau (hai dây cung này khác nhau)

Giải



Theo giả thiết:

(C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{13}$

(C') có tâm $O'(6;0)$, bán kính $R'=5$

Tọa độ các giao điểm của (C) và (C′) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ (x-6)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2+y^2-12x+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow A(2;3)$$

(vì $y_A>0$)

Gọi H, H′ lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và các đường tròn (C), (C′) thỏa $AH=AH'$, với H không trùng H′.

Gọi M, M′ lần lượt là trung điểm của AH, AH′. Vì A là trung điểm của đoạn thẳng HH′ nên A là trung điểm của đoạn MM′.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OO′ $\Rightarrow I(3;0)$

Ta có $IA//OM$. Mà $OM\perp(d)$ nên $IA\perp d \Rightarrow (d)$ có vtcp $\overrightarrow{IA}=(-1;3)$ và qua $A(2;3)$

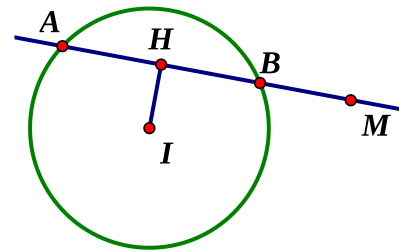
Vậy phương trình đường thẳng d: $-1(x-2)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow -x+3y-7=0$

Bài 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-1)^2=20$ và điểm $M(3;-1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 8 (I là tâm đường tròn (C)).

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(4;1)$, $R=2\sqrt{5}$

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $IH\perp AB$



Diện tích tam giác IAB: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = 8 \Leftrightarrow IH = 4$ hoặc $IH = 2$

Đường thẳng Δ đi qua điểm M nên có phương trình: $ax + by - 3a + b = 0,\ a^2 + b^2 > 0$

TH1: $d(I,\Delta) = IH = 4 \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4$

$\Leftrightarrow 15a^2 - 4ab + 12b^2 = 0 \Leftrightarrow 11(a^2+b^2) + (2a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (không thỏa $a^2 + b^2 > 0$)

TH2: $d(I,\Delta) = IH = 2 \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow a(3a-4b) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $3a - 4b = 0$

Nếu $a = 0$ chọn $b = 1$ suy ra phương trình $\Delta: y + 1 = 0$

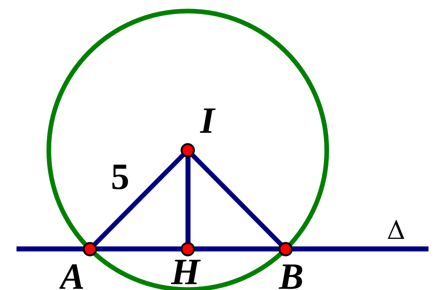
Nếu $3a - 4b = 0$, chọn $a = 4$ và $b = 3$, phương trình $\Delta: 4x + 3y - 9 = 0$

Bài 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: mx + 4y = 0$. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;m)$, bán kính $R = 5$

Gọi H là trung điểm của dây cung AB. Ta có IH là đường cao của tam giác IAB.



$IH = d(I,\Delta) = \frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}$

$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2+16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2+16}}$

Diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB} = 12 \Leftrightarrow 2S_{\Delta IAH} = 12$

$\Leftrightarrow d(I,\Delta).AH = 12 \Leftrightarrow 25|m| = 3(m^2+16) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 3 \\ m = \pm\frac{16}{3} \end{array}\right.$

Bài 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các điểm $A(4;-3), B(4;1)$ và đường thẳng $(d): x + 6y = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A và B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc (d).

Giải

Giả sử hai tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt nhau tại $M \in (d)$

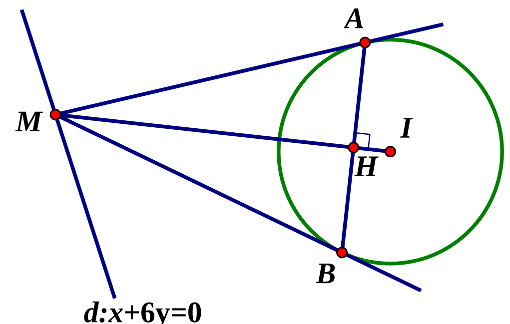
Phương trình đường thẳng AB: $x = 4$

Gọi I là tâm đường tròn (C), H là trung điểm AB $\Rightarrow H(4;-1)$

$IM \perp AB; IM \cap AB = H \Rightarrow$ phương trình của đường thẳng IM là $y + 1 = 0$

$M = d \cap IM \Rightarrow M(6;-1) \Rightarrow \overrightarrow{MA}(-2;-2)$

Giả sử $I(a;-1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}(4-a;-2)$



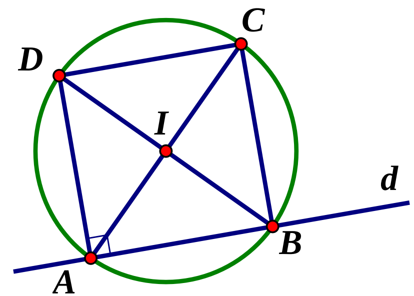
Mà $IA \perp MA \Rightarrow -2(4-a)+4=0 \Leftrightarrow a=2$

Vậy $I(2;-1)$, bán kính của (C) là $IA=2\sqrt{2} \Rightarrow (C):(x-2)^2+(y+1)^2=8$

Vậy đường tròn (C) có phương trình là $(x-2)^2+(y+1)^2=8$

Bài 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ và điểm $A(3;3)$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và cắt (C) tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng độ dài cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (C).

Giải



Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$, bán kính $R=4$. Ta có $A(3;3)\in(C)$

Phương trình đường thẳng d có dạng:

$a(x-3)+b(y-3)=0, \left(a^2+b^2\neq 0\right)$

$\Leftrightarrow ax+by-3a-3b=0$

Giả sử (d) cắt (C) tại hai điểm A, B. Ta có $AB=IA\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ và $d(I,d)=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$

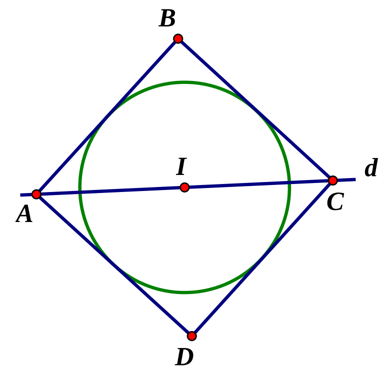
$\Leftrightarrow \frac{|3a-b-3a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2|b|=\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow b=\pm a$

Chọn $a=1 \Rightarrow b=\pm 1$

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần lập là: $x+y-6=0$ hoặc $x-y=0$

Bài 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-8x+6y+21=0$ và đường thẳng d: $x+y-1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD ngoại tiếp (C) biết A thuộc đường thẳng d.

Giải



(C) có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=2$. I thuộc d.

A thuộc d nên $A(t;1-t)$, $IA=|t-4|\sqrt{2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=2 \end{array}\right.$

$t=6 \Rightarrow A(6;-5);C(2;-1)$

$t=2 \Rightarrow A(2;-1);\ C(6;-5)$

BD đi qua I và vuông góc với d nên $BD: x-y-7=0$

B thuộc BD nên $B(s;s-7)$

$IB=|s-4|\sqrt{2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} s=6 \\ s=2 \end{array}\right.$

$s=6 \Rightarrow B(6;-1);\ D(2;-5)$

$s=2 \Rightarrow B(2;-5);\ D(6;-1)$

Vậy có 4 hình vuông cần tìm.

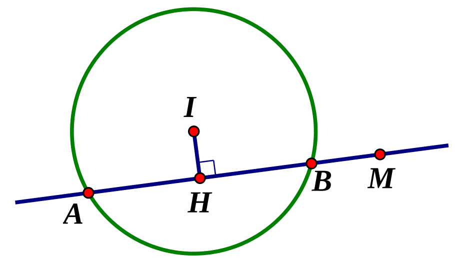
Bài 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-1)^2=25$ và $M(2;-5)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $MA=5MB$.

Giải

Đường tròn có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=5$

$P_{M/(C)}=20>0$, do đó M nằm ngoài (C).

$P_{M/(C)}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=5MB^2=20$. Ta được $MB=2$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d. Ta có $BH=2MB=4$, suy ra $IH=3$.

$d:a(x-2)+b(y+5)=0\ \left(a^2+b^2>0\right)$.

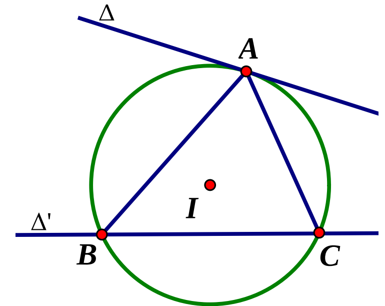
$$IH=d(I,d)=\frac{|3a-6b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow|a-2b|=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\4a=3b\end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là $x-2=0$ và $3x+4y+14=0$

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y+6=0$ tại $A(2;-3)$ và cắt đường thẳng $\Delta':3x-4y-11=0$ tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 7, biết tâm đường tròn (C) có tung độ dương.

Giải

Gọi $I(a;b),(b>0)$ là tâm đường tròn (C) ta có:



$$\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\Rightarrow(a-2).4-(b+3).3=0\Leftrightarrow a-2=\frac{3(b+3)}{4}\quad(1)$$

$$S_{\Delta ABC}=7=\frac{1}{2}BC.d(A;\Delta')\Rightarrow BC=\frac{14}{d(A;\Delta')}=10$$

$$d^2(I;\Delta')=R^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2=AI^2-25$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3a-4b-11}{5}\right)^2=(a-2)^2+(b+3)^2-25$$

$$\Leftrightarrow\left[3(a-2)-4b-5\right]^2=25\left[(a-2)^2+(b+3)^2-25\right]\quad(2)$$

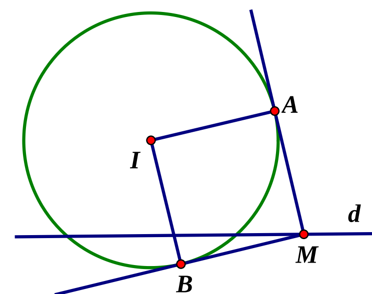
Từ (1) và (2) suy ra $b=1\vee b=-\frac{337}{288}$

Do $b>0$ nên $I(5;1)\Rightarrow R=5\Rightarrow(C):(x-5)^2+(y-1)^2=25$

Bài 37. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d:x-y+1=0$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y-4=0$ có tâm I. Tìm tọa độ điểm M trên d để từ M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có các tiếp điểm là A, B sao cho tứ giác IAMB là hình vuông.

Giải

Tìm được tâm đường tròn $I(2;1)$ và bán kính $R=3$. Lý luận để $MI=3\sqrt{2}$



M thuộc $x-y+1=0$ do đó $M(x;x+1)$

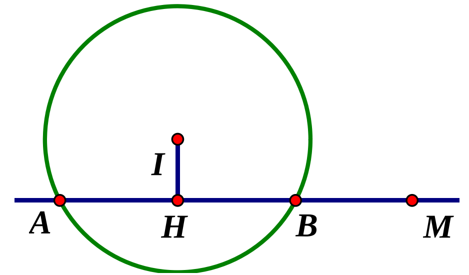
$$MI=\sqrt{(x-2)^2+x^2}=3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x-14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+2\sqrt{2}\\x=1-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm $M\left(1+2\sqrt{2};2+2\sqrt{2}\right)$ hoặc $M\left(1-2\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\right)$

Bài 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=25$, điểm $M(7;3)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA=3MB$.

Giải



Đường tròn (C) có $I(1;-1)$, $R=5$

$MI=\sqrt{52}>5\Rightarrow$ M nằm ngoài đường tròn.

Ta có $MA.MB=MI^2-R^2=27$

$\Rightarrow 3MB^2=27\Rightarrow MB=3\Rightarrow MA=9\Rightarrow AB=6$

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow IH=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=4$

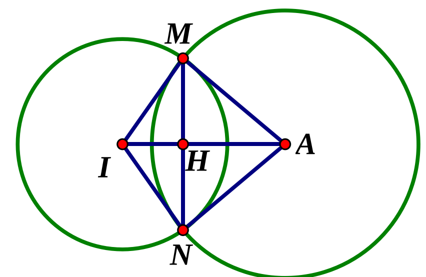
Gọi đường thẳng đi qua $M(7;3)$ có vtpt $\vec{n}(A,B),\left(A^2+B^2\neq 0\right)\Rightarrow \Delta: Ax+By-7A-3B=0$. Theo trên ta có: $d(I;\Delta)=IH=4\Leftrightarrow \frac{|A-B-7A-3B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4\Leftrightarrow 5A^2+12AB=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\A=-\frac{12B}{5}\end{array}\right.$

Với $A=0\Rightarrow \Delta: y=3$

Với $A=-\frac{12B}{5}\Rightarrow \Delta:12x-5y-69=0$

Bài 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $A(5;1)$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C′) có tâm A, cắt đường tròn (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN=\sqrt{3}$.

Giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

Gọi H là giao điểm của MN và AI.

Ta có: $IH=\sqrt{IM^2-MH^2}=\frac{3}{2}$, $IA=5$

TH1: A và I nằm khác phía với MN.

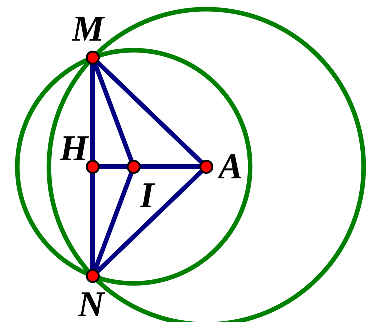
Ta có: $HA=IA-IH=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

Trong tam giác vuông MHA ta có: $AM=\sqrt{HM^2+AH^2}=\sqrt{13}$

Vậy phương trình đường tròn (C′) là: $(x-5)^2+(y-1)^2=13$

TH2: A và I nằm cùng phía với MN.

Vì $IA>IH$ nên I nằm giữa H và A.



Ta có: $HA=IA+IH=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$

Trong tam giác vuông MHA ta có:

$AM=\sqrt{HM^2+AH^2}=\sqrt{43}$

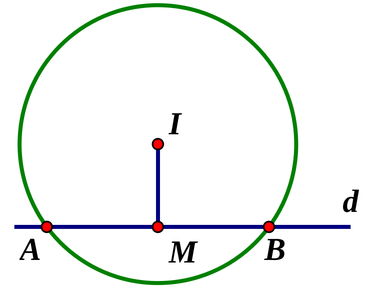
Vậy phương trình đường tròn (C′) là: $(x-5)^2+(y-1)^2=43$

Bài 40. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(2;4)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại 2 điểm A và B, sao cho M là trung điểm của AB.

Giải

(C): $I(1;3), R=2$, $A, B\in(C)$, M là trung điểm AB $\Rightarrow IM\perp AB\Rightarrow$ đường thẳng d cần tìm là đường thẳng AB.

d đi qua M có vec-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(1;1)$ nên có phương trình: $x+y-6=0$



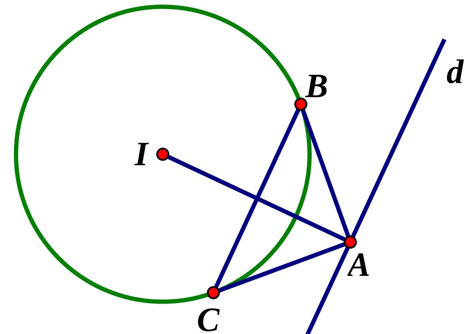
Bài 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và đường thẳng d có phương trình $x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB và AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Giải

Phương trình đường tròn có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$, từ A kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn và $AB\perp AC$

$\Rightarrow$ tứ giác ABIC là hình vuông cạnh bằng 3 $\Rightarrow IA=3\sqrt{2}$. Để điểm A duy nhất $\Rightarrow$ đường thẳng IA vuông góc với d. Ta có:

$$d(I;d)=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-5\\m=7\end{array}\right.$$



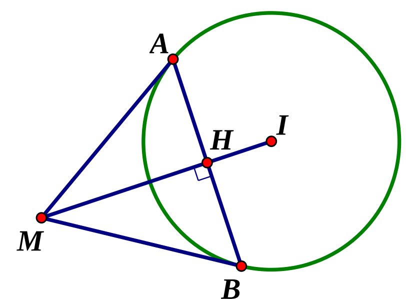
Bài 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi A và B là các tiếp điểm kẻ từ M đến (C). Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng AB.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=2$, $MI=2\sqrt{5}>2=R$ nên M nằm ngoài đường tròn.

Ta có thể làm một trong hai cách sau:

Giả sử $A(x_0;y_0)$ là tiếp điểm suy ra:



$\begin{cases}A\in(C)\\ \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{IA}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\in(C)\\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}=0\end{cases}$, trong đó $\overrightarrow{MA}=(x_0+3;y_0-1)$, $\overrightarrow{IA}=(x_0-1;y_0-3)$.

Do đó ta có: $\begin{cases}x_0^2+y_0^2-2x_0-6y_0+6=0\\(x_0+3)(x_0-1)+(y_0-1)(y_0-3)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-2x_0-6y_0+6=0\\x_0^2+y_0^2+2x_0-4y_0=0\end{cases}\Rightarrow 2x_0+y_0-3=0$

Suy ra đường thẳng AB có phương trình: $2x+y-3=0$.

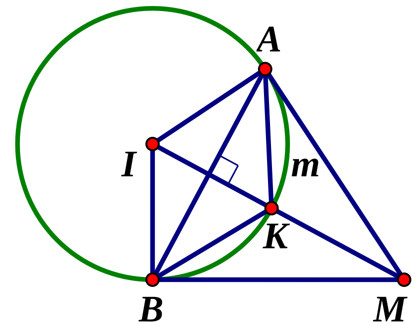
Đường thẳng MI có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

Do MI vuông góc với AB, nên tọa độ của điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $H\left(\frac{1}{5}; \frac{13}{5}\right)$

Bài 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$ và điểm $M(7;7)$. Chứng minh rằng từ M kẻ đến (T) được hai tiếp tuyến MA, MB với A, B là các tiếp điểm. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

Giải



$(T) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13 \Rightarrow I(1;-2)$, $R = \sqrt{13}$.

Ta có $\overrightarrow{IM}(6;9) \Rightarrow IM = \sqrt{117} > \sqrt{13}$, suy ra điểm M nằm ngoài (T). Vậy từ M kẻ đến (T) được 2 tiếp tuyến. Gọi $K = MI \cap AmB$. Ta có $MA = MB, IA = IB \Rightarrow MI$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow KA = KB$

$\Rightarrow \angle KAB = \angle KBA = \angle KAM = \angle KBM$

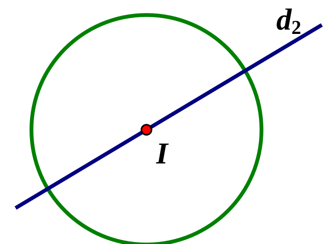
$\Rightarrow K$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

Phương trình tham số MI: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$, $MI \cap (T)$ tại $K_1(3;1)$ và $K_2(-8;-12)$

Ta có $AK_1 < AK_2$. Vậy $K \equiv K_1$, tức là $K(3;1)$.

Bài 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $d_1: 3x + 2y - 4 = 0$, $d_2: 5x - 2y + 9 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $I \in d_2$ và tiếp xúc với d_1 tại điểm $A(-2;5)$.

Giải



Do đường tròn tiếp xúc với đường thẳng d_1 tại điểm A nên $IA \perp d_1$.

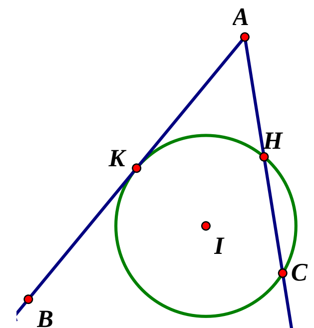
Vậy phương trình IA là: $2(x+2) - 3(y-5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 19 = 0$

Kết hợp $I \in d_2$ nên tọa độ tâm I là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 5x - 2y + 9 = 0 \\ 2x - 3y + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow I(1;7)$

Bán kính đường tròn $R = IA = \sqrt{13}$. Vậy phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 13$.

Bài 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(I): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ và đường thẳng $d: 4x - 3y + 9 = 0$. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường thẳng d, C là điểm thuộc đường tròn (I). Biết điểm $H\left(\frac{22}{5}; \frac{11}{5}\right)$ là một giao điểm của AC với đường tròn (I), điểm $K\left(-\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$ là trung điểm của cạnh AB. Xác định tọa độ các điểm A, B, C biết diện tích tứ giác AHIK bằng 24 và hoành độ điểm A dương.



Giải

Tâm $I(2;-1)$, $R=4$

Dễ dàng tìm được AB tiếp xúc với đường tròn tại $K\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$ do $d(I;AB)=4=R$

$HK=4\sqrt{2}=2R^2$ nên tam giác IHK vuông tại I.

Từ đó nên AHIK là hình thang vuông tại I và K.

Theo $S=24=\frac{IK(AK+IH)}{2}\Rightarrow AK=8$

Vì A thuộc d nên $A\left(a;\frac{4a+9}{3}\right)$

Nên $\left(a+\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{4a}{3}+3-\frac{7}{5}\right)^2=64\Rightarrow\frac{25}{9}a^2+\frac{20}{3}a-60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{18}{5}\\a=-6\end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(\frac{18}{5};\frac{39}{5}\right)$ (Vì A có hoành độ dương)

K là trung điểm của AB nên $B(-6;-5)$.

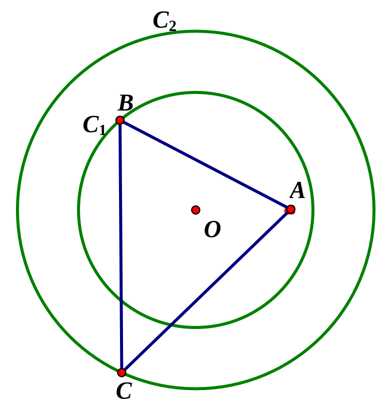
$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{4}{5};-\frac{28}{5}\right)$ nên phương trình AH: $7\left(x-\frac{22}{5}\right)+\left(y-\frac{11}{5}\right)=0\Leftrightarrow 7x+y-33=0$

C là giao điểm của AH với (I) nên tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2-4x+2y-11=0\\7x+y-33=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{22}{5}\Rightarrow y=\frac{11}{5}\\x=\frac{26}{5}\Rightarrow y=-\frac{17}{5}\end{array}\right.\Rightarrow C\left(\frac{26}{5};-\frac{17}{5}\right)$$

Bài 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(1;0)$ và các đường tròn $(C_1): x^2+y^2=2$, $(C_2): x^2+y^2=5$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên (C_1) và (C_2) để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải



Đầu tiên ta có nhận xét: để tam giác ABC có diện tích lớn nhất thì O phải là trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh:

Giả sử CO không vuông góc AB thì ta luôn tìm được $C'\in(C_2)$ sao cho $d(C';AB)$ lớn hơn $d(C;AB)$, hay $S_{\Delta ABC'}$ lớn hơn $S_{\Delta ABC}\rightarrow$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $CO\perp AB$

Tương tự ta cũng có $BO\perp AC$

Vậy O là trực tâm của tam giác ABC.

Suy ra $AO\perp BC\Rightarrow x_B=x_C$

Và ta giả sử $B(t;b)\in(C_1)$, $C(t;c)\in(C_2)$ $(t,b,c\in\mathbb{R})$ thì ta có:

$$\begin{cases}t^2+b^2=2\\t^2+c^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=2-t^2\\c^2=5-t^2\end{cases}$$

Mà $CO \perp AB$ nên $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB} = 0$ hay $t(t-1) + bc = 0$

Suy ra $b^2c^2 = t^4 - 2t^3 + t^2$

Do đó $\left(2-t^2\right)\left(5-t^2\right) = t^4 - 2t^3 + t^2 \Leftrightarrow (t+1)\left(2t^2 - 10t + 10\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Tới đây ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.d(A;BC) = \dfrac{1}{2}|x_A - x_B|.|y_B - y_C| = \dfrac{1}{2}|1-t||b-c|$

Suy ra: $S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}(1-t)^2\left(b^2 + c^2 - 2bc\right)$

$= \dfrac{1}{4}(1-t)^2\left[\left(2-t^2\right) + \left(5-t^2\right) - 2\left(t-t^2\right)\right] = \dfrac{1}{4}(1-t)^2(7-2t)$

Nếu $t = -1$ thì ta suy ra $S^2_{\Delta ABC} = 9$ hay $S_{\Delta ABC} = 3$

Nếu $t = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ thì ta dễ thấy điều vô lý vì $t^2 + b^2 = 2$

Nếu $t = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ thì ta có $S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{8} < 9 \rightarrow$ loại.

Suy ra với $t = -1$ thì $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

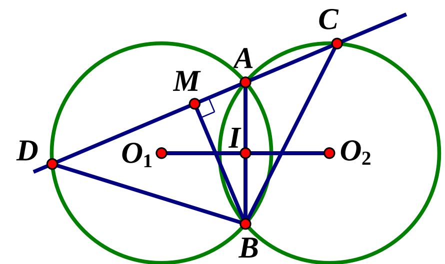
Và ta có $\begin{cases} bc = -2 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

Suy ra $B(-1;1), C(-1;-2)$ hoặc $B(-1;-1), C(-1;2)$

Vậy $B(-1;1)$, $C(-1;-2)$ hoặc $B(-1;-1)$, $C(-1;2)$ thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Bài 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính bằng nhau và cắt nhau tại $A(4;2)$ và B. Một đường thẳng đi qua A và $N(7;3)$ cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại D và C. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác BCD biết rằng đường thẳng nối tâm O_1, O_2 có phương trình $x - y - 3 = 0$ và diện tích tam giác BCD bằng $\dfrac{24}{5}$.

Giải



Phương trình $AN: x - 3y + 2 = 0$

Có $O_1O_2 \perp AB \Rightarrow AB: x + y - 6 = 0$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow B(5;1)$ (với I là giao điểm của AB và O_1O_2)

Do 2 đường tròn bán kính bằng nhau (hay hai đường tròn bằng nhau) nên $BDC = BCA$ (cùng chắn cung AB) nên tam giác BDC cân. Kẻ BM vuông góc với DC suy ra $BM: 3x + y - 16 = 0$ hay $M\left(\dfrac{23}{5};\dfrac{11}{5}\right)$

Gọi $D(3t-2;t) \Rightarrow C\left(\dfrac{56}{5} - 3t;\dfrac{22}{5} - t\right)$

Có $S_{BCD} = \frac{1}{2}d(B;CD).DC \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{17}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(1;1),\ C\left(\frac{41}{5};\frac{17}{5}\right) \\ C(1;1),\ D\left(\frac{41}{5};\frac{17}{5}\right) \end{array}\right.$

Bài 48. Cho đường tròn (C) có phương trình: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ và điểm $M(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (C) tại A và B sao cho $MA^2+MB^2-8MA.MB=10$.

Giải

Theo bài ra ta có $I(-1;2),\ R=3$

M nằm ngoài đường tròn nên ta có $MA.MB = MI^2 - R^2 = 1$

Theo bài ra ta có:

$\begin{cases} MA^2+MB^2-8MA.MB=10 \\ MA.MB=1 \end{cases}$

$\Rightarrow (MA-MB)^2 = 16 \Rightarrow AB = 4$

Phương trình $\Delta: a(x-2)+b(y-3)=0\ \left(a^2+b^2 \neq 0\right) \Leftrightarrow ax+by-2a-3b=0$

Từ $d(I;\Delta)=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 2a^2+3ab-2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2b \\ a=\frac{1}{2}b \end{array}\right.$

Phương trình đường thẳng thỏa mãn bài toán là: $2x-y-1=0,\ x+2y-8=0$.

Bài 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=9$ và đường tròn $(C'): (x-3)^2+(y-3)^2=a\ (a>0)$. Tìm a để (C) cắt (C′) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc AOB bằng 120^0.

Giải

(C) có tâm là $O(0;0)$, bán kính $R_1=3$, (C) có tâm là $I(3;3)$, bán kính là $R_2=\sqrt{a}$.

(C) cắt (C′) tại hai điểm phân biệt A, B khi $OI-R_1<R_2<OI+R_1$

$\Leftrightarrow 27-18\sqrt{2}<a<27+18\sqrt{2}$

Tọa độ 2 điểm A và B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ (x-3)^2+(y-3)^2=a & (2) \end{cases}$

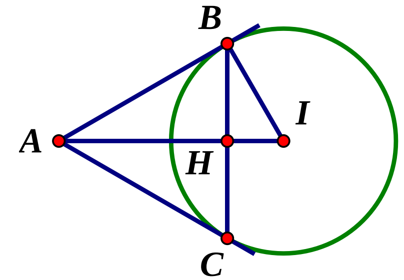
Lấy (1) trừ (2), suy ra $\Delta: 6x+6y-27+a=0$ là đường thẳng qua A và B.

Mà tam giác OAB cân, có $OA=OB=3$ nên $OH=\frac{3}{2}$ (H là trung điểm của AB).

Hay $d(O;\Delta)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow |a-27|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=27\pm 9\sqrt{2}$ (tmđk). Vậy $a=27\pm 9\sqrt{2}$.

Bài 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và điểm $A(5;-6)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (C) với B, C là các tiếp điểm. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải



Đường tròn có tâm $I(-1;2)$ bán kính $R=5$. Suy ra $IA=10$.

Gọi H là giao điểm của BC và IA, ta có:

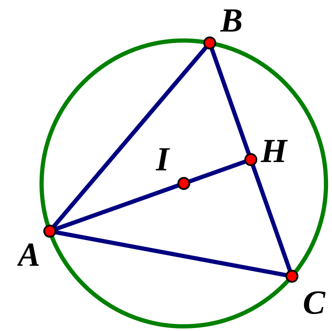
$IH.IA=BI^2 \Rightarrow IH=\frac{BI^2}{IA}=\frac{5}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2};0\right)$

$\Rightarrow \cos AIB=\frac{1}{2} \Rightarrow AIB=60^0$ nên tam giác ABC đều. Suy ra tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}$, suy ra $G(2;-2)$.

Bài 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-5=0$ và điểm $A(0;-1)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc đường tròn (C) sao cho tam giác ABC đều.

Giải



(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{10} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IH} \Rightarrow \begin{cases}1=2(x_H-1)\\3=2(y_H-2)\end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

(do I là trọng tâm tam giác đều ABC, H là trung điểm BC).

Phương trình đường thẳng BC đi qua H và nhận $\overrightarrow{AI}=(1;3)$ làm vec-tơ pháp tuyến là: $x+3y-12=0$

Vì $B,C\in(C) \Rightarrow$ tọa độ B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y-5=0\\x+3y-12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{7+\sqrt{3}}{2}\\x=\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}y=\frac{7-\sqrt{3}}{2}\\x=\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

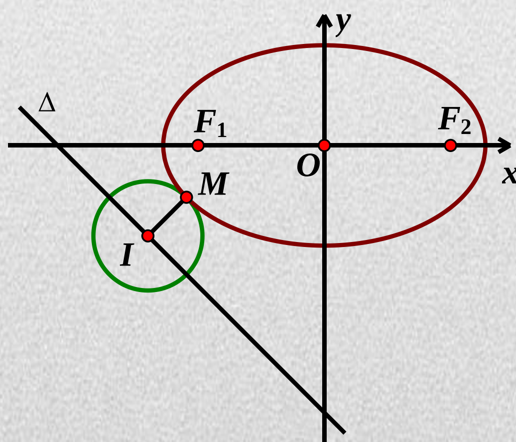
Vậy $B\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc ngược lại.

TRẦN ĐÌNH CƯ
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

Tháo gỡ Oxy

Chủ đề 7: Elip

Tài liệu thân tặng các em học sinh 12, chuẩn bị kỳ thi THPT Quốc Gia 2016. Chúc các em đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến.

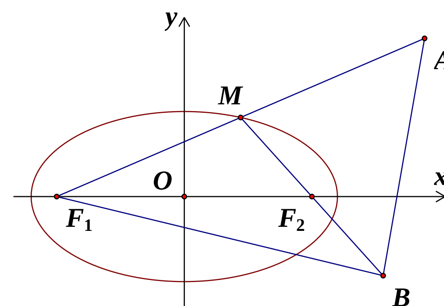


Huế, Ngày 21/05/2016

CHỦ ĐỀ 7. ELIP

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm M thuộc elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có $F_1(-2;0), F_2(2;0)$. Gọi A là điểm đối xứng của F_1 qua M và B là điểm đối xứng của M qua F_2. Viết phương trình (E) biết tam giác ABF_1 vuông tại B và diện tích tam giác $MF_1F_2=\sqrt{15}$

Giải



Ta có $c=2=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow b^2=a^2-4$

Gọi $M(x_0;y_0)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}d(M;Ox).F_1F_2=\sqrt{15} \Rightarrow |y_0|=\frac{\sqrt{15}}{2}$

Tam giác ABF_1 vuông tại B suy ra $MB=\frac{1}{2}AF_1=MF_1 \Rightarrow 2MF_2=MF_1$ (1)

Ta có $MF_1+MF_2=2a$ (2). Kết hợp (1) với (2):

$$\Rightarrow \begin{cases} MF_1=\frac{4a}{3}=a+\frac{2}{a}x_M \\ MF_2=\frac{2a}{3}=a-\frac{2}{a}x_M \end{cases} \Rightarrow x_M=\frac{a^2}{6}$$

Cho $M\in(E) \Rightarrow \frac{a^4}{36a^2}+\frac{15}{4b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{9}+\frac{15}{a^2-4}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=9 \Rightarrow b^2=a^2-4=5 \\ a^2=31 \Rightarrow b^2=a^2-4=27 \end{array}\right.$

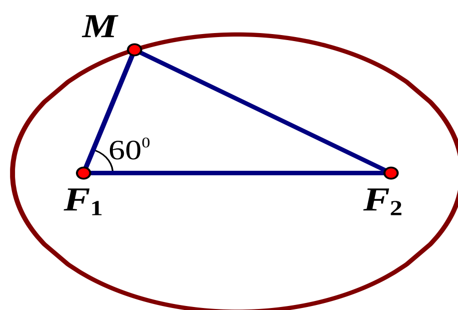
Vậy $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ hoặc $(E): \frac{x^2}{31}+\frac{y^2}{27}=1$ là các elip cần tìm.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 (hoành độ của F_1 âm). Tìm tọa độ điểm M thuộc elip (E) sao cho góc $MF_1F_2=60^0$.

Giải

Ta có: $a=3; b=\sqrt{5}; c=\sqrt{9-5}=2$

Tọa độ tiêu điểm: $F_1(-2;0); F_2(2;0)$



Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)$ nên $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1$ (*)

$MF_1=3+\frac{2}{3}x_0;\ MF_2=3-\frac{2}{3}x_0;\ F_1F_2=4$

Để $MF_1F_2=60^0$ thì:

$MF_2^2=MF_1^2+F_1F_2^2-2.MF_1.MF_2.\cos MF_1F_2$

$\Leftrightarrow \left(3-\frac{2}{3}x_0\right)^2=\left(3+\frac{2}{3}x_0\right)^2+4^2-2.\left(3+\frac{2}{3}x_0\right).4.\cos 60^0$

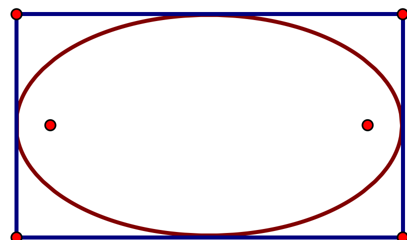
$\Leftrightarrow 4x_0=-3 \Leftrightarrow x_0=-\frac{3}{4}$

Thay $x_0 = -\frac{3}{4}$ vào (*) ta có: $\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{9} + \frac{y_0^2}{5} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{75}{16} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{5\sqrt{5}}{4}$

Như vậy: $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{5\sqrt{5}}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3}{4}; -\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)$

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của Elip (E), biết tâm sai của (E) bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng 24.

Giải



Giả sử ptct (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$

Từ giả thiết ta có $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow 2a = 3b$ (1)

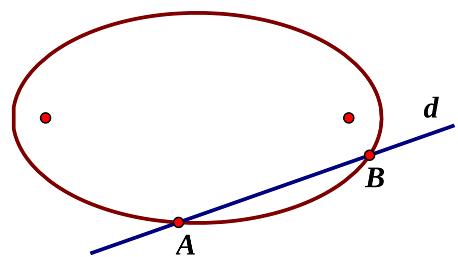
Mặt khác hình chữ nhật cơ sở có chiều dài bằng 2a, chiều rộng 2b nên ta có: $2a.2b = 24 \Leftrightarrow a.b = 6$ (2)

Giải hệ (1) và (2) tìm được $a = 3; b = 2$

Vậy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng d: $3x + 4y - 12 = 0$. Chứng minh rằng đường thẳng d cắt elip (E) tại hai điểm A, B phân biệt. Tìm điểm $C \in (E)$ sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Giải



Xét hệ pt: $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 3x = 12 - 4y \end{cases}$

Giải hệ ta có: $\begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{41}}{4} \\ y = \frac{6 - \sqrt{41}}{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{6 - \sqrt{41}}{4} \\ y = \frac{6 + \sqrt{41}}{3} \end{cases}$

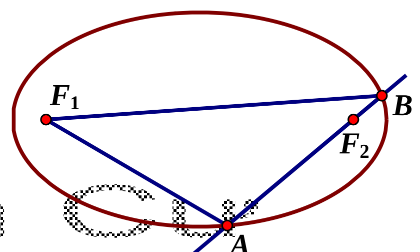
$A\left(\frac{6 + \sqrt{41}}{4}; \frac{6 - \sqrt{41}}{3}\right); B\left(\frac{6 - \sqrt{41}}{4}; \frac{6 + \sqrt{41}}{3}\right)$. $AB = \frac{5\sqrt{41}}{6}$

Giả sử $C(x_0; y_0)$, đặt CH là khoảng cách từ C đến AB.

$CH = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 12|}{5}$

Giải hệ $\begin{cases} |3x_0 + 4y_0 - 12|.\sqrt{41} = 72 \\ 9x_0^2 + 16y_0^2 = 154 \end{cases}$. Giải hệ tìm ra x_0, y_0.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 (biết F_1 có hoành độ



âm). Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua F_2 và song song với $(\Delta_1): y = -x + 1$ đồng thời cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích tam giác ABF_1.

Giải

Ta có: $a^2 = 6, b^2 = 2$ mà $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

Suy ra $F_1(-2;0), F_2(2;0)$

Vì $\Delta // \Delta_1$ và Δ đi qua F_2 nên phương trình của (Δ) là $y = -x + 2$

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

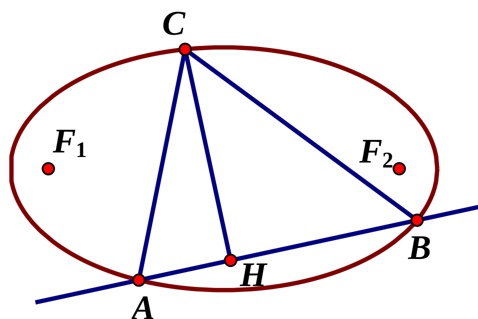
hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Suy ra $A\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Ta có $AB = \sqrt{6}, d(F_1;AB) = d(F_1,\Delta) = 2\sqrt{2}$

Suy ra diện tích tam giác ABF_1 là $S = \dfrac{1}{2}d(F_1,AB).AB = 2\sqrt{3}$ (đvtt)

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 12 = 0$ cắt (E) tại hai điểm A và B. Tìm điểm $C \in (E)$ sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải



Hoành độ giao điểm của đường thẳng Δ và elip (E) là nghiệm phương trình:

$$9x^2 + 16\left(\frac{12-3x}{4}\right)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Như vậy Δ và elip (E) cắt nhau tại hai điểm $A(0;3)$ và $B(4;0)$ có $AB = 5$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên Δ thì:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{5}{2}CH$$

Nên tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi CH lớn nhất.

Vì $C \in (E)$ nên tồn tại $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $C = (4\sin t; 3\cos t)$

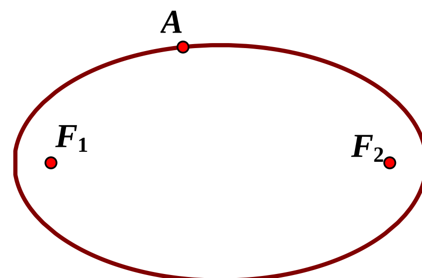
Bởi vậy:

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = -\dfrac{3\pi}{4}$, khi đó $C = \left(4\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right); 3\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ hay $C\left(-2\sqrt{2}; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là $C\left(-2\sqrt{2}; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm $M\in(E)$, hãy tính giá trị biểu thức $P=F_1M^2+F_2M^2-3.OM^2-F_1M.F_2M$

Giải



$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$

Do (E) có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$

$\Rightarrow c=\sqrt{3},\ c^2=a^2-b^2\Rightarrow a^2=b^2+3\quad(1)$

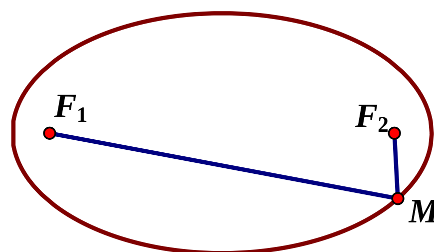
$A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)\in(E)\Rightarrow\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\ (2)$

Thế (1) vào (2) ta giải phương trình ẩn b^2 được $b^2=1\Rightarrow a^2=4\Rightarrow(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

$P=(e+ax_M)^2+(e-ax_M)^2-3\left(x_M^2+y_M^2\right)-\left(a^2-e^2x_M^2\right)=1$

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn F_1F_2 (F_1, F_2 là hai tiêu điểm) dưới một góc 60^0.

Giải



Ta có: $a=3;\ c=\sqrt{6},\ M\in(E)$

$\Rightarrow MF_1=3+\frac{\sqrt{6}}{3}x;\ MF_2=3-\frac{\sqrt{6}}{3}x$

Xét ΔMF_1F_2 có: $F_2F_2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1.MF_2.\cos60^0$

$\Leftrightarrow MF_1.MF_2=\frac{(2a)^2-(2c)^2}{3}$

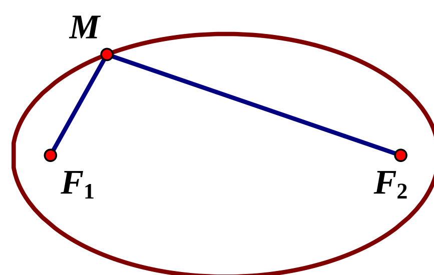
$\Leftrightarrow\left(3+\frac{\sqrt{6}}{3}x\right).\left(3-\frac{\sqrt{6}}{3}x\right)=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$

Từ đó suy ra $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy có 4 điểm M cần tìm là $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\sqrt{\frac{15}{2}};\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\sqrt{\frac{15}{2}};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\sqrt{\frac{15}{2}};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip có phương trình: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M thuộc elip sao cho góc $F_1MF_2=90^0$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Giải



Ta có: $a=5;\ b=3$ suy ra $c=4$

Gọi $M(a;b)$ thuộc elip ta có: $MF_1=5+\frac{4}{5}a$, $MF_2=5-\frac{4}{5}a$

Vì tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên $MF_1^2+MF_2^2=F_1F_2^2$

$\Leftrightarrow \left(5+\frac{4}{5}a\right)^2+\left(5-\frac{4}{5}a\right)^2=64 \Leftrightarrow a^2=\frac{175}{8}$

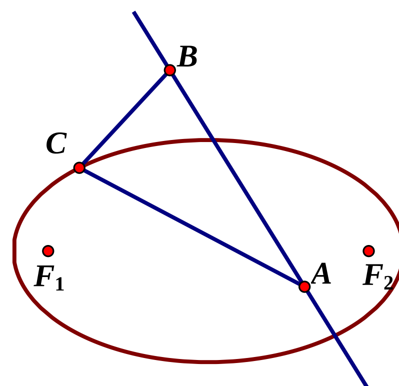
Do M thuộc elip nên $\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{9}=1 \Leftrightarrow b^2=\frac{9}{8}$

Vậy tọa độ cần tìm là: $M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4};\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4};-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{5\sqrt{14}}{4};\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{5\sqrt{14}}{4};-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai điểm $A(3;-2)$, $B(-3;2)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải

Ta có phương trình đường thẳng AB: $2x+3y=0$



Gọi $C(x;y)$, $x>0, y>0$. Khi đó ta có: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C;AB)=\frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}|2x+3y|$$

$$=3\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right|$$

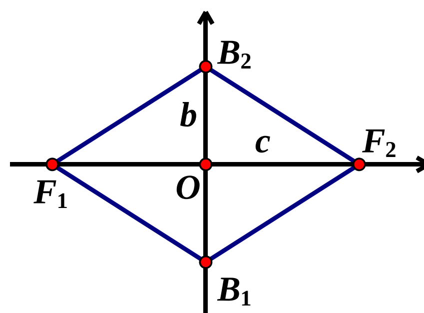
$$\le 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ \frac{x}{3}=\frac{y}{2}\end{cases} \begin{cases}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$. Vậy $C\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai bằng $\frac{3}{5}$, biết diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) bằng 24.

Giải

Phương trình chính tắc (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$



Gọi $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ là các tiêu điểm với $c=\sqrt{a^2-b^2}$ và $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ là các đỉnh trên trục bé.

$\Rightarrow F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi.

Suy ra:

$$S_{F_1B_1F_2B_2}=\frac{1}{2}F_1F_2.B_1B_2=\frac{1}{2}2c.2b=2bc=24$$

$$\Leftrightarrow bc=12 \Leftrightarrow b^2c^2=144 \Leftrightarrow b^2\left(a^2-b^2\right)=144 \quad (1)$$

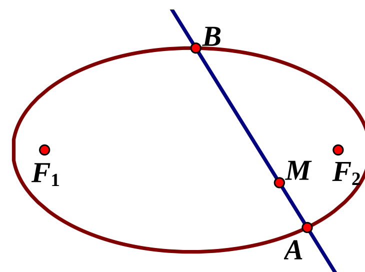
Tâm sai $e=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow 25c^2=9a^2 \Leftrightarrow 25\left(a^2-b^2\right)=9a^2 \Leftrightarrow 4a=5b$ hay $a=\frac{5}{4}b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=5, b=4$. Suy ra $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và $M(1;-1)$. Một đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại A, B sao cho $MA.MB$ lớn nhất. Tìm tọa độ A, B.

Giải

Ta thấy $M(1;-1)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại A, B.



Gọi phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+at \\ y=-1+bt \end{cases}$, $\left(t\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\right)$

$A(1+at_1;-1+bt_1)$, $B(1+at_2;-1+bt_2)$, tham số t_1, t_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(1+at)^2}{8}+\frac{(-1+bt)^2}{4}=1\Leftrightarrow\left(a^2+2b^2\right)t^2+2(a-2b)t-5=0$$

Theo hệ thức Vi-et ta có: $t_1t_2=\frac{-5}{a^2+2b^2}$

$$MA.MB=\sqrt{(at_1)^2+(bt_1)^2}.\sqrt{(at_2)^2+(bt_2)^2}$$

$$=\left(a^2+b^2\right)|t_1t_2|=\frac{5\left(a^2+b^2\right)}{a^2+2b^2}=\frac{5}{2-\frac{a^2}{a^2+b^2}}$$

Vì $o\le\frac{a^2}{a^2+b^2}\le 1$ nên MA.MB lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{a^2}{a^2+b^2}=1\Leftrightarrow b=0$

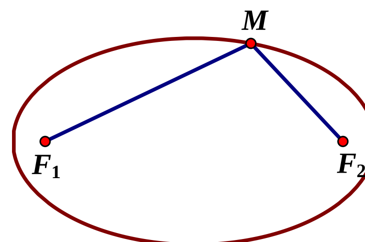
Khi đó t_1, t_2 là nghiệm của phương trình: $t^2-2t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t_1=1+\sqrt{6} \\ t_2=1-\sqrt{6} \end{array}\right.$

Hay $A\left(\sqrt{6};1\right), B\left(-\sqrt{6};1\right)$ hoặc $A\left(-\sqrt{6};1\right), B\left(\sqrt{6};1\right)$

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E):4x^2+9y^2=36$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 lần lượt nằm phía bên trái và bên phải của điểm O. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1^2+MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(E)$, ta có $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$, với $-3\le x_0\le 3$, ta có $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.



$$P=MF_1^2+2MF_2^2$$

$$=(a+ex_0)^2+2(a-ex_0)^2=3a^2-2aex_0+3e^2x_0^2 \quad \text{Xét}$$

$$=27-2.3.\frac{\sqrt{5}}{3}x_0+3.\frac{5}{9}x_0^2=\frac{5}{3}\left(x_0^2-2.\frac{3}{\sqrt{5}}x_0^2+\frac{81}{5}\right)$$

$f(x_0)=x_0^2-2.\frac{3}{\sqrt{5}}x_0+\frac{81}{5}$ trên đoạn $[-3;3]$ có $f'(x_0)=2x_0-\frac{6}{\sqrt{5}}$

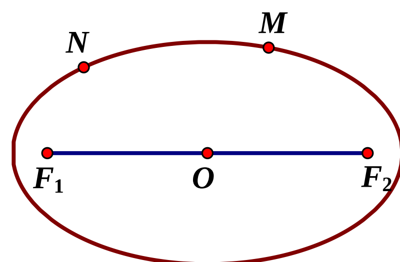
$f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{\sqrt{5}}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x_0)$ trên $[-3;3]$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x_0\in[-3;3]} f(x_0)=f\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\frac{108}{5}\Rightarrow \min P=\frac{5}{3}.\frac{108}{5}=36$

Vậy $\min P = 36$ khi $x = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Khi đó $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) đi qua điểm $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$ và có độ dài trục lớn bằng 6. Tìm tọa độ của điểm N thuộc (E) sao cho $ON = \sqrt{5}$.

Giải



Giả sử phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$

Vì độ dài trục lớn bằng 6 nên $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

Vì $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{18}{4a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$

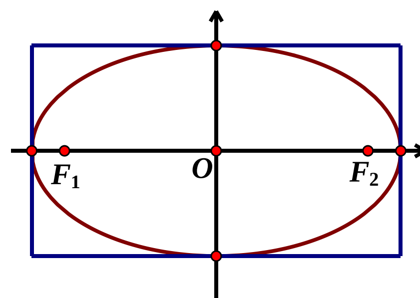
$\Leftrightarrow b^2 = 4 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Giả sử $N(x;y)$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{5} \\ y^2 = \frac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ y = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

Vậy có 4 điểm: $N\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $N\left(\frac{-3\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $N\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $N\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}; -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng $2\sqrt{5}$.

Giải



Giả sử phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > b > 0$

Ta có $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 = 3c^2$

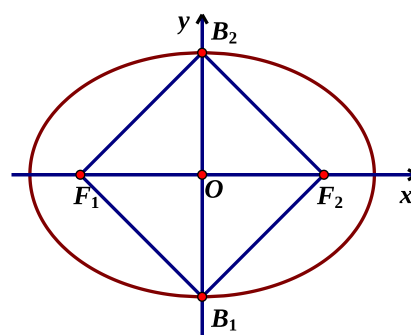
$\Leftrightarrow a^2 = 3\left(a^2 - b^2\right) \Leftrightarrow 2a^2 = 3b^2 \ (1)$

Độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng $2\sqrt{5} \Leftrightarrow 4\left(a^2 + b^2\right) = 4.5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 3, b^2 = 2$. Vậy elip (E) có phương trình $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tìm phương trình chính tắc của elip biết hai tiêu điểm cùng với hai đỉnh trên trục bé xác định một hình vuông và phương trình hai đường chuẩn là $x = \pm 8$.

Giải



Hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ và hai điểm trên trục bé $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ xác định một hình vuông nên $b = c > 0$.

Phương trình hai đường chuẩn của elip là $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c} = \pm 8$

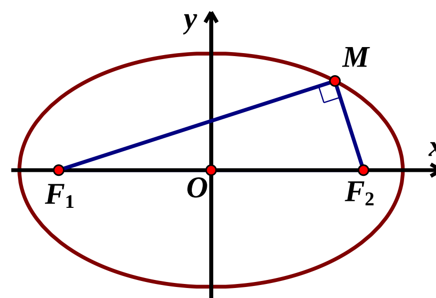
Nên ta có hệ: $\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ a^2 = 8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 = a^2 \\ a^2 = 8c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 = 8c \\ a^2 = 8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4, (c > 0) \\ a^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow b^2 = 16$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$

Bài 17. Lập phương trình chính tắc của elip trong mặt phẳng Oxy biết điểm $M\left(\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ thuộc elip và tam giác F_1MF_2 vuông tại M, trong đó F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Giải



Tam giác F_1MF_2 vuông cho $OM = c \Leftrightarrow c^2 = 3$ (c là nửa tiêu cự)

Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b)$

$M\left(\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{8}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1 \quad (1)$

Mà $c^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow b^2 = a^2 + 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) cho phương trình

$3a^4 - 18a^2 + 24 = 0 \Rightarrow a^2 = 2, a^2 = 4$

Chọn $a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 1$

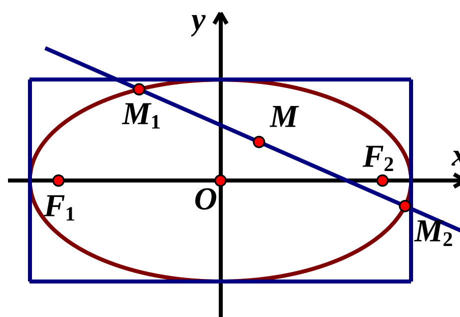
Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Bài 18. Trong hệ tọa độ Oxy cho elip có phương trình ở dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ (E), hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng 24, chu vi bằng 20 và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt sao cho M là trung điểm.

Giải

Tìm được $a = 3, b = 2$

Giả sử đường thẳng qua M cắt (E) tại hai điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$. Khi đó:



$\begin{cases} 4x_1^2 + 9y_1^2 = 36 \\ 4x_2^2 + 9y_2^2 = 36 \end{cases}$

$\Rightarrow 4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 9(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$

Mà M là trung điểm M_1, M_2 nên $x_1 + x_2 = 2, \ y_1 + y_2 = 2$ nên

$4(x_1 - x_2) + 9(y_1 - y_2) = 0 \qquad (1)$

Giả sử phương trình đường thẳng qua $M(1;1)$ có VTPT $(a;b)$.

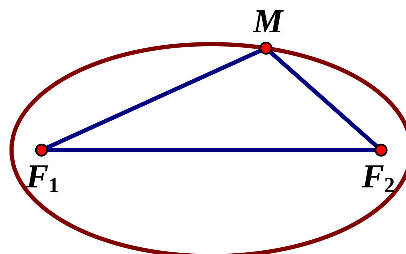
Khi đó có phương trình: $a(x-1) + b(y-1) = 0$ do qua M_1, M_2 nên:

$\begin{cases} a(x_1 - 1) + b(y_1 - 1) = 0 \\ a(x_2 - 1) + b(y_2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $a = 4, b = 9$. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $5x + 9y - 13 = 0$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm là F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

Giải



$a = 5, b = 3 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow p = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = 9$

$\Rightarrow S_{MF_1F_2} = pr = 9.\frac{4}{3} = \frac{1}{2}d(M, Ox).8$

$\Rightarrow d(M, Ox) = 3 = |y_M| \Rightarrow y_M = \pm 3$

Do đó $M(m;3)$ hoặc $M(m;-3)$

Vì M thuộc (E) nên $m = 0$. Vậy $M(0;3)$ và $M(0;-3)$ là hai điểm thỏa mãn bài toán.

Bài 20. Cho đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại 2 điểm A, B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 1.

Giải

$\Delta \perp d \Rightarrow \Delta$ có phương trình: $x - 2y + m = 0$

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y + m = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ 8y^2 - 4my + m^2 - 4 = 0 \quad (1) \end{cases}$

d cắt (E) tại 2 điểm A, B khi và chỉ khi hệ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 32 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < m < \sqrt{8} \qquad (*)$

gọi $A(2y_1 - m; y_1), B(2y_2 - m; y_2)$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm của (1).

$\Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{m}{2}; \; y_1.y_2 = \frac{m^2 - 4}{8}$

$\Rightarrow AB^2 = 5(y_2 - y_1)^2 = 5\left[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2\right] = \frac{5(8 - m^2)}{4} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5(8 - m^2)}}{2}$

Đường cao $OH = d(O;\Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$

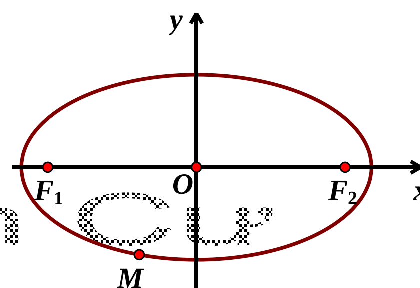
Suy ra: $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB.OH = \frac{\sqrt{m^2(8 - m^2)}}{4} = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\left[\begin{array}{l} \Delta: x - 2y + 2 = 0 \\ \Delta: x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right.$

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, một elip (E) đi qua điểm $M(-2;-3)$ và có phương trình một đường chuẩn là $x + 8 = 0$. Viết phương trình chính tắc của (E).

Giải

Gọi phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a > b > 0)$



Giả thiết $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1 & (1) \\ \dfrac{a^2}{c}=8 & (2) \end{cases}$

Ta có:

$(2)\Leftrightarrow a^2=8c \Rightarrow b^2=a^2-c^2=8c-c^2=c(8-c)$

Thay vào (1) ta được $\dfrac{4}{8c}+\dfrac{9}{c(8-c)}=1 \Leftrightarrow 2c^2-17c+26=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=\dfrac{13}{2} \end{array}\right.$

Nếu $c=2$ thì $a^2=16, b^2=12 \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

Nếu $c=\dfrac{13}{2}$ thì $a^2=52, b^2=\dfrac{39}{4} \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{52}+\dfrac{y^2}{\frac{39}{4}}=1$

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+4=0$ và hai elip $(E_1): \dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1, (E_2): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm M thuộc đường thẳng Δ. Tìm tọa độ điểm M sao cho elip (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Giải

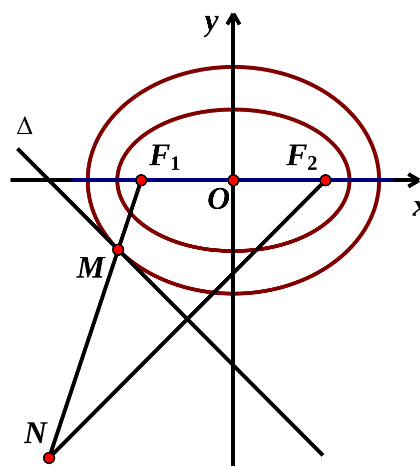
Hai elip có các tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$

Điểm $M\in(E_2)\Rightarrow MF_1+MF_2=2a$. Vậy (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất khi và chỉ khi MF_1+MF_2 nhỏ nhất. Ta có F_1, F_2 cùng phía với Δ. Gọi $N(x;y)$ là điểm đối xứng với F_2 qua Δ, suy ra $N(-4;-6)$. Ta có: $MF_1+MF_2=MF_1+MN\geq NF_1$ (không đổi).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M=NF_1\cap\Delta$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 3x-y+6=0 \\ x+y+4=0 \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$



Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta: x+y+9=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, biết rằng đường tròn đó có một điểm chung duy nhất với (E) và có bán kính nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow \dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\ (*)$

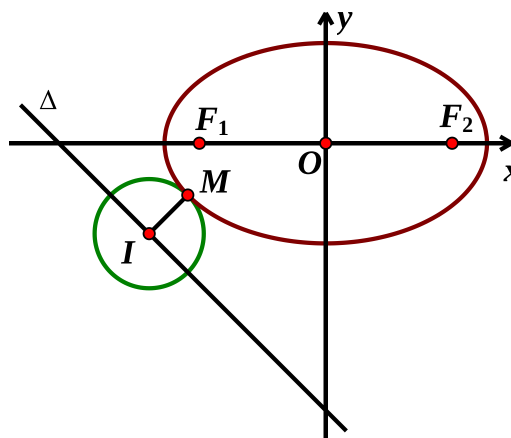
$d(M;\Delta)=\dfrac{|x_0+y_0+9|}{\sqrt{2}}$

Ta có $(x_0+y_0)^2=\left(4.\dfrac{x_0}{4}+3.\dfrac{y_0}{3}\right)^2\leq(16+19)\left(\dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}\right)=25 \Rightarrow -5\leq x_0+y_0\leq 5$

$\Rightarrow 4 \le x_0 + y_0 + 9 \le 14 \Rightarrow 2\sqrt{2} \le \frac{|x_0 + y_0 + 9|}{\sqrt{2}} \le 7\sqrt{2}$

$d(M;\Delta) = 2\sqrt{2}$ khi

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ \frac{x_0}{16} = \frac{y_0}{9} \\ x_0 + y_0 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{16}{5} \\ y_0 = -\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{16}{5}; -\frac{9}{5}\right)$$



$\Rightarrow d(M;\Delta)$ nhỏ nhất là $2\sqrt{2}$ khi $M\left(-\frac{16}{5}; -\frac{9}{5}\right)$

Gọi I là hình chiếu của M lên Δ, gọi (C) là đường tròn tâm I bán kính $R = IM$. Khi đó (C) chính là đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy $\forall M' \ne M \in (E)$ thì $IM' > IM$ nên (C) và (E) chỉ có một điểm chung duy nhất là M. Hơn nữa mọi đường tròn khác (nếu có) thì bán kính sẽ lớn hơn IM (do IM là nhỏ nhất).

Đường thẳng qua M vuông góc nhận $\vec{n}(1;-1)$ làm vec-tơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$1\left(x + \frac{16}{5}\right) - \left(y + \frac{9}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x - y + \frac{7}{5} = 0$$

Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y + \frac{7}{5} = 0 \\ x + y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{5} \\ y = -\frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{26}{5}; -\frac{19}{5}\right)$

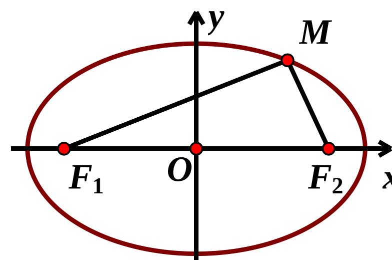
$R = IM = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ phương trình đường tròn $(C): \left(x + \frac{26}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{5}\right)^2 = 8$

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường elip $(E): \frac{x^2}{2013} + \frac{y^2}{2012} = 1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E), M là điểm tùy ý trên (E). Chứng minh rằng $MF_1.MF_2 + OM^2 = 4025$.

Giải

Gọi $M(x;y) \in (E): \frac{x^2}{2013} + \frac{y^2}{2012} = 1$. Suy ra

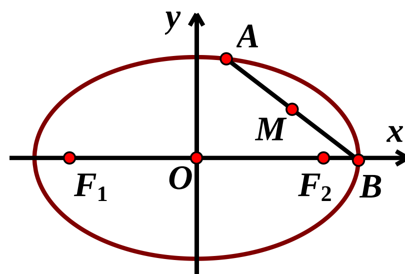


$MF_1 = \sqrt{2013} + e.x, MF_2 = \sqrt{2013} - e.x$

$$\begin{aligned} MF_1.MF_2 + OM^2 &= \left(\sqrt{2013} + e.x\right)\left(\sqrt{2013} - e.x\right) \\ &\quad + x^2 + y^2 \\ &= 2013 - e^2x^2 + x^2 + y^2 \\ &= 2013 + y^2 + x^2\left(1 - e^2\right) \\ &= 2013 + y^2 + x^2\left(1 - \frac{1}{2013}\right) = 2013 + 2012 = 4025 \end{aligned}$$

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

Giải



Thay tọa độ M vào vế trái phương trình (E) ta được: $\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=\frac{25}{36}<1$.

Chứng tỏ M nằm trong (E) $\Rightarrow$ Nếu Δ đi qua M thì Δ luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa M nằm giữa A và B.

Giả sử $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$. Do A, B thuộc (E) nên ta có hệ:

$$\begin{cases}4x_A^2+9y_A^2=36 & (1)\\ 4x_B^2+9y_B^2=36 & (2)\end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế, ta được:

$$4(x_B+x_A)(x_B-x_A)+9(y_B+y_A)(y_B-y_A)=0 \quad (3)$$

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases}x_A+x_B=2x_M=4\\ y_A+y_B=2y_M=2\end{cases} \quad (4)$

Thế (4) vào (3) ta được: $16(x_B-x_A)+18(y_B-y_A)=0$

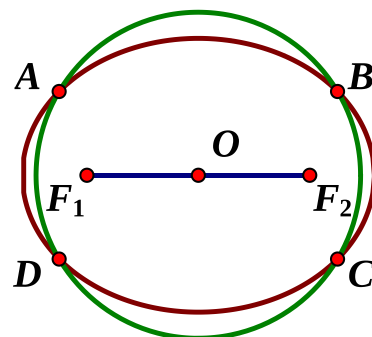
$\Leftrightarrow 8(x_B-x_A)+9(y_B-y_A)=0 \quad (5)$

Do $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$ là vtcp của Δ nên từ (5) suy ra vtpt của đường thẳng Δ là $\vec{n}=(8;9)$

Vậy Δ đi qua $M(2;1)$ và có vtpt $\vec{n}=(8;9) \Rightarrow$ pt$\Delta: 8x+9y-25=0$.

Bài 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=16$. Viết phương trình chính tắc của elip biết tâm sai $e=\frac{1}{2}$, elip cắt đường tròn (C) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB song song với trục hoành và $AB=2BC$

Giải



Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

Ta có: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{3}{4}a^2 \quad (*)$

Vì elip và đường tròn (C) đều nhận trục Ox, Oy làm trục đối xứng và $AB=2BC$ nên giả sử tọa độ $B(2t;t), t>0$.

Thay tọa độ B vào phương trình đường tròn ta có: $t^2=\frac{1}{5}$, thay vào phương trình elip cùng với (*) thì $a^2=\frac{256}{15}; b^2=\frac{64}{5}$.

Vậy phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{\frac{256}{15}}+\frac{y^2}{\frac{64}{5}}=1$.

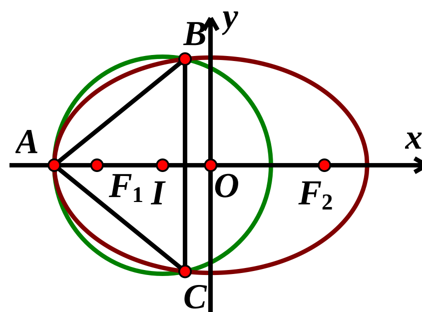
Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

Ta có $IA=2\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình: $(x+1)^2+y^2=4$

Tọa độ các điểm B, C cần tìm là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$$



$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ 5x^2+18x+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ x=-3\vee x=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

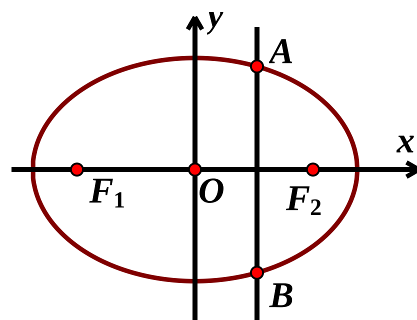
$x=-3\Rightarrow y=0\Rightarrow B\equiv A\vee C\equiv A$ (loại)

$x=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow y=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\Rightarrow B\left(-\dfrac{3}{5};\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\dfrac{3}{5};\mp\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$

Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip có phương trình chính tắc $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình đường thẳng song song với Oy và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho $AB=4$.

Giải

Gọi phương trình đường thẳng song song với Oy là $d:x=a$ (với $a\neq 0$). Tung độ giao điểm của d và (E) là: $\dfrac{a^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$



$\Leftrightarrow y^2=9.\dfrac{25-a^2}{25}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\ \left(|a|\le 5\right)$

Vậy $A\left(a;\dfrac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\right), B\left(a;-\dfrac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\right)\Rightarrow AB=\dfrac{6}{5}\sqrt{25-a^2}$

Do đó $AB=4\Leftrightarrow\dfrac{6}{5}\sqrt{25-a^2}=4\Leftrightarrow 25-a^2=\dfrac{100}{9}\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $x=\dfrac{5\sqrt{5}}{3};x=-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.